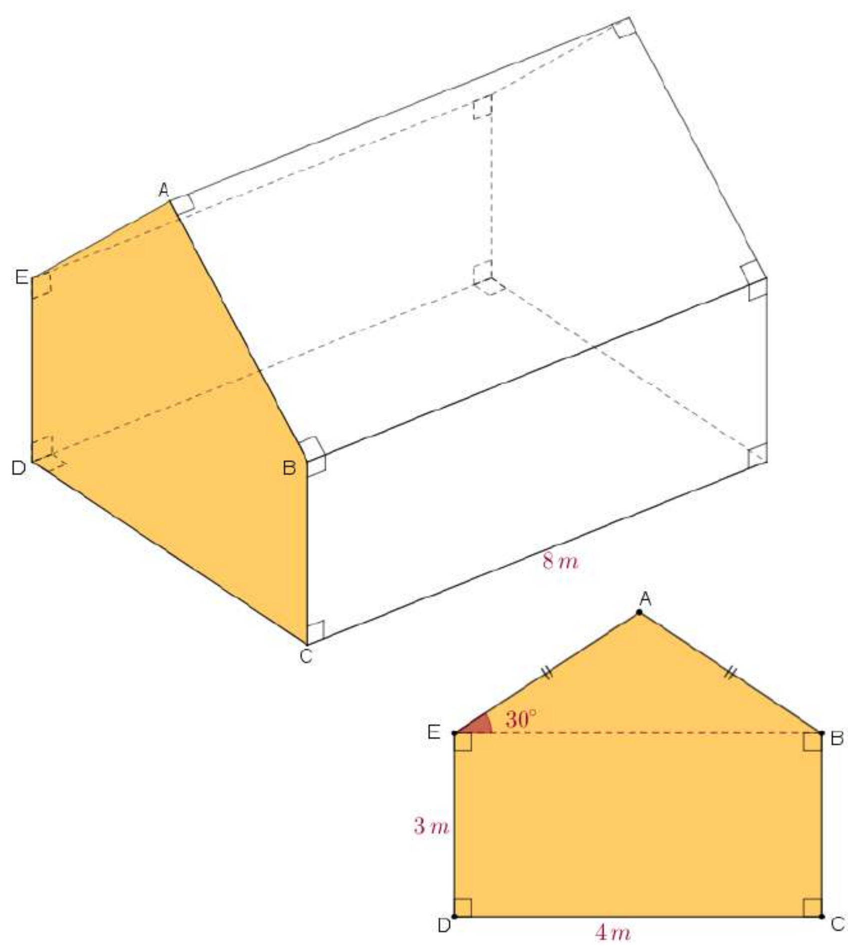
.Problema para ajudar na escola: Armazenagem de grãos

Problema

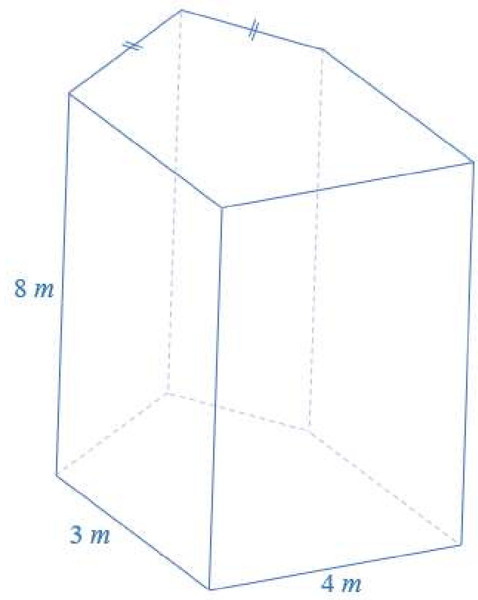
(A partir da 2ª série do E. M.)

A figura mostra um dos celeiros para armazenamento de grãos de uma propriedade rural.
Supondo que a parte interna do celeiro em questão é totalmente aproveitável para armazenamento, determinar o volume máximo de grãos que podem ser armazenados nesse celeiro.



Solução 1

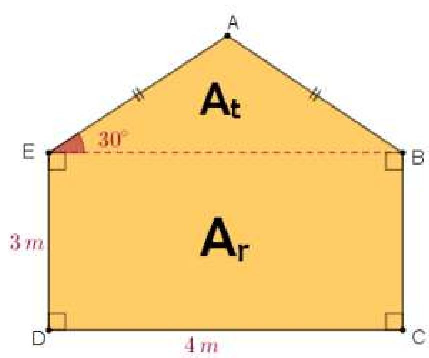
Observe que o celeiro de armazenamento de que trata o problema tem a forma de um prisma reto de base pentagonal, conforme podemos observar na figura abaixo.



Dessa forma, o volume máximo de grãos que podem ser armazenados nesse celeiro é o volume V desse prisma, que sabemos ser dado pelo produto entre a área da sua base e a sua altura:

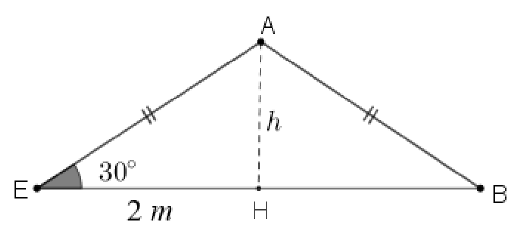
$$V = \text{área da base} \times \text{altura}\,.$$

Como conhecemos a altura do prisma, $8\,m$, precisamos determinar a área A_p do pentágono mostrado abaixo, área esta que é a soma das áreas do triângulo ABE e do retângulo $BCDE$: $\boxed{A_p = A_t + A_r}$.



- A área A_r é facilmente obtida: $\boxed{A_r = 3 \times 4 = 12\,m^2}$. (i)

- Para calcular A_t, vamos obter a altura AH relativa ao lado EB do triângulo ABE.

  Observe que ABE é um triângulo isósceles; assim, como o segmento AH é a altura relativa ao lado EB, então o ponto H divide o lado EB em dois segmentos congruentes de comprimento $\dfrac{4}{2} = 2\,m$.

  Logo, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{h}{2}$, donde obtemos que:

  $$h = 2 \times \operatorname{tg} 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,m\,.$$

  Pronto, já podemos obter A_t:

  $$\boxed{A_t = \frac{4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,m^2}\,. \qquad (ii)$$

Com isso, por (i) e (ii):

$$A_p = A_t + A_r = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 12\right)\,m^2$$

e, portanto, o volume do prisma é:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}$$

$$V = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 12\right) \times 8$$

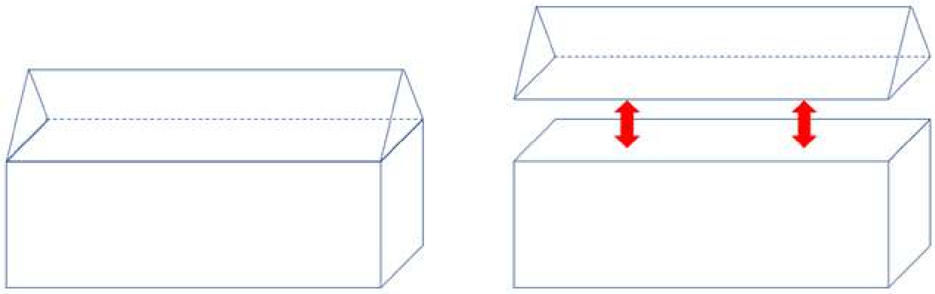
$$V = \frac{32\sqrt{3} + 288}{3}\,m^3\,.$$

Então, o volume máximo de grãos que podem ser armazenados no celeiro é de aproximadamente $\boxed{114\,m^3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Poderíamos também tratar geometricamente o celeiro de armazenamento como um sólido composto por um paralelepípedo e um prisma triangular reto, conforme podemos observar na figura abaixo.



Desse modo, o volume máximo de grãos que podem ser armazenados no celeiro é o volume V desse prisma, que é a soma dos volumes do paralelepípedo e do prisma triangular.

Aproveitem os cálculos acima e concluam que o volume do celeiro também poderia ser calculado desta maneira:

$$V = \text{volume do paralelepípedo} + \text{volume do prisma triangular}$$

$$V = (4 \times 8 \times 3) + \left(\frac{4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} \times 8 \right)$$

$$V = 96 + \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

$$V = \frac{288 + 32\sqrt{3}}{3}\, m^3\,.$$

Novamente, o volume máximo de grãos que podem ser armazenados no celeiro é de aproximadamente $\boxed{114\, m^3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.