.Problema para ajudar na escola: Arcos e ângulos

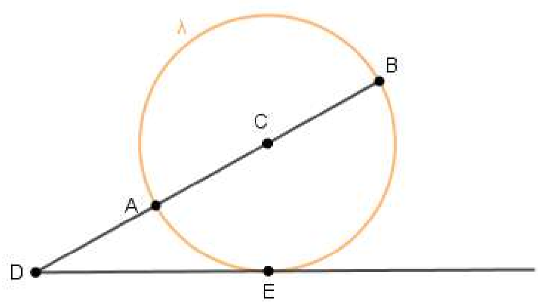
Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Na figura, A, B e E são pontos da circunferência λ cujo centro é C.

Se $\overline{AB}$ é um diâmetro, E é um ponto de tangência e as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AE}$ e $\overset{\frown}{EB}$ são $10\,cm$ e $20\,cm$, respectivamente, qual é a medida em graus do ângulo $B\hat{D}E$?

E em radianos?



Ajudas

A um arco de circunferência podemos associar duas medidas distintas:
– a sua medida angular;
– a sua medida linear.

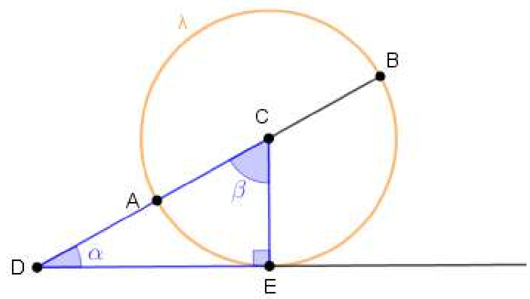
Ambas podem ser obtidas a partir da medida angular e do comprimento da circunferência que define o arco; mas, se você não se lembra delas, clique **AQUI**. (Não se esqueça de fechar a janelinha que se abriu com as informações, depois de utilizá-la.)

Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

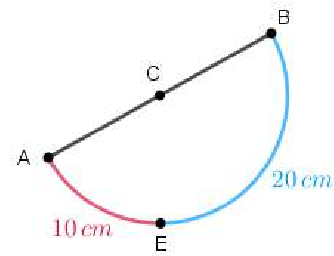
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Solução

Utilizando a segunda ajuda, observamos que $B\hat{D}E$ é um dos ângulos agudos internos do triângulo retângulo CED, assinalado na figura abaixo. Assim, para obtermos a medida α do ângulo $B\hat{D}E$ em questão, basta conhecermos a medida β do ângulo central $D\hat{C}E$, já que, conforme a terceira ajuda, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.



Vamos lá!



Pelos dados do problema, as medidas dos arcos $\widehat{AE}$ e $\widehat{EB}$ são $10\,cm$ e $20\,cm$; portanto, a medida do arco $\widehat{AB}$ é $30\,cm$.

Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é o semiperímetro da circunferência λ e, consequentemente, o comprimento de λ é $60\,cm$.

Utilizando, agora, a primeira ajuda, observamos que uma regra de três simples resolve o problema de se determinar a medida β do ângulo central. Vamos obter inicialmente as medidas em graus; depois faremos a conversão para radianos.

Armando a regra de três

$$\begin{array}{ccc} 60\,cm & \text{———————} & 360^\circ \\ 10\,cm & \text{———————} & \beta \end{array}$$

obtemos que:

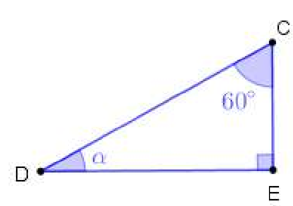
$$60 \times \beta = 10 \times 360^\circ$$
$$\beta = \frac{3600^\circ}{60}$$
$$\boxed{\beta = 60^\circ}\,.$$

Observamos que poderíamos armar a regra de três a partir da informação de que o semiperímetro da circunferência λ é $30\,cm$. Nesse caso, só teríamos que lembrar que o semiperímetro está associado ao ângulo raso de 180° e, portanto, armaríamos a regra de três assim:

$$\begin{array}{ccc} 30\,cm & \text{———————} & 180^\circ \\ 10\,cm & \text{———————} & \beta \end{array}$$

e obteríamos que:

$$30 \times \beta = 10 \times 180^\circ$$
$$\beta = \frac{1800^\circ}{30}$$
$$\boxed{\beta = 60^\circ}\,.$$



Com a medida β, podemos aplicar a terceira ajuda ao triângulo CDE e obtermos:

$$60^\circ + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$$
$$\boxed{\alpha = 30^\circ}\,.$$

Para obtermos a medida em radianos do ângulo $B\hat{D}E$, lembramos que, por exemplo, 180° correspondem a π radianos e fazemos mais uma regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \text{———————} & \pi\,radianos \\ 30^\circ & \text{———————} & \alpha \end{array}$$

para obtermos:

$$30\pi = 180\alpha$$
$$\alpha = \frac{30\pi}{180}$$
$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}\,radianos}\,.$$

Então, a medida do ângulo $B\hat{D}E$ é $\boxed{\alpha = 30^\circ}$ ou $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{6}\,radianos}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.