.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a quarta de suas 40 equações

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Resolva a equação

$$\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}}=1.$$

Solução

- Elevando ambos os membros da equação proposta ao quadrado, obtemos:

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}}\right)^2=1^2$$
$$3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}=1$$
$$3-1=\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}$$
$$2=\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}\,. \qquad (i)$$

- Agora, ao elevarmos os membros da equação (i) ao quadrado, segue que:

$$2^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}\right)^2$$
$$4=3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}$$
$$4-3=\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}$$
$$1=\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}\,. \qquad (ii)$$

- Elevando os membros da equação (ii) ao quadrado, temos que:

$$1^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}\right)^2$$
$$1=x-\sqrt{2x+1}$$
$$\sqrt{2x+1}=x-1\,. \qquad (iii)$$

- Elevando os membros, agora, da equação (iii) ao quadrado:

$$(\sqrt{2x+1})^2=(x-1)^2$$
$$2x+1=x^2-2x+1$$
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$$x=0 \text{ ou } x=4\,.$$

Cabe aqui uma palavrinha com relação às consequências do "algebrismo" que fizemos ao partir da equação $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}}=1$ e chegar na equação $2x+1=x^2-2x+1$, cujas raízes são 0 e 4.

Observe que se $z=5$, então podemos concluir que $z^2=25$, uma vez que

$z^2 = z \cdot z = 5 \cdot 5 = 25\,.$

No entanto, se $z^2 = 25$ e se não tivermos outras informações sobre z, então não podemos simplesmente concluir que $z = 5$, pois poderíamos ter $z = -5$.

Em termos de símbolos, estamos afirmando que

$$z = 5 \Rightarrow z^2 = 25,$$

mas que

$$z^2 = 25 \not\Rightarrow z = 5,$$

e, com isso,

$$z^2 = 25 \not\Leftrightarrow z = 5,$$

o que quer dizer que **as duas equações não são equivalentes**.

E se duas equações não são equivalentes, elas não têm necessariamente as mesmas soluções!

Observe, então, a sequência lógica dos procedimentos de elevarmos ao quadrado ambos os termos da nossa sucessão de igualdades:

$$\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1 \Longrightarrow 2 = \sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = \sqrt{x-\sqrt{2x+1}} \Longrightarrow \sqrt{2x+1} = x-1 \Longrightarrow x^2-4x=0\,.$$

Resumidamente, podemos concluir, somente, que

$$\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1 \Longrightarrow x^2-4x=0$$

e isso significa que todas as raízes de $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1$ são raízes de $x^2-4x=0$, mas as raízes de $x^2-4x=0$ não são necessariamente raízes de $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1$.

Dessa forma, devemos testar as duas raízes da equação $x^2-4x=0$, para verificarmos se, ao fazermos sucessivas operações de "elevar ao quadrado", não ficamos com raízes a mais.

Vamos lá:

- Se $x = 0$ então:

  $$\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{0-\sqrt{2\times 0+1}}}} = \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{-1}}} \neq 1$$

  uma vez que $\sqrt{-1}$ não é um número real.

  Assim, $x = 0$ **não é solução da equação original.**

- Se $x = 4$ então:

  $$\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{2\times 4+1}}}} = \sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{4-3}}} = \sqrt{3-\sqrt{4}} = \sqrt{1} = 1$$

  e, assim, $x = 4$ **é solução da equação original**.

Finalizando, a equação $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1$ tem uma única raíz: $\boxed{x = 4}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.