



.Problema para ajudar na escola: Valor da expressão



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(ONEM 2008 – Adaptado) Calcule o valor da expressão numérica

$$(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (17^2 - 18^2 - 19^2 + 20^2) .$$

Solução

Veja que:

- $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = \boxed{4}$.
- $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = \boxed{4}$.
- $9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2 = 81 - 100 - 121 + 144 = 225 - 221 = \boxed{4}$.
- $13^2 - 14^2 - 15^2 + 16^2 = 169 - 196 - 225 + 256 = 425 - 421 = \boxed{4}$.
- $17^2 - 18^2 - 19^2 + 20^2 = 289 - 324 - 361 + 400 = 689 - 685 = \boxed{4}$.

Assim,

$$(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (17^2 - 18^2 - 19^2 + 20^2) = 5 \times \boxed{4} = 20 .$$

Coincidência?

– NÃO! Observe...

Perceba que cada parêntese da expressão numérica em questão tem quatro parcelas, sendo a última da forma $(4n)^2$, com n um número natural não nulo. Portanto, o n -ésimo parêntese da expressão numérica pode ser assim definido:

$$(4n - 3)^2 - (4n - 2)^2 - (4n - 1)^2 + (4n)^2 .$$

Fazendo as continhas, segue que

$$\begin{aligned} & (4n - 3)^2 - (4n - 2)^2 - (4n - 1)^2 + (4n)^2 \\ &= (16n^2 - 24n + 9) - (16n^2 - 16n + 4) - (16n^2 - 8n + 1) + (16n^2) \\ &= (16n^2 - 16n^2 - 16n^2 + 16n^2) + (-24n + 16n + 8n) + (9 - 4 - 1) \\ &= 0 + 0 + 4 = 4, \end{aligned}$$

ou seja,

- $\boxed{((4n - 3)^2 - (4n - 2)^2 - (4n - 1)^2 + (4n)^2) = 4}$, para qualquer número natural não nulo n .

Assim, para determinarmos as somas finais abaixo, por exemplo, só precisamos determinar quantos parênteses do tipo $((4n - 3)^2 - (4n - 2)^2 - (4n - 1)^2 + (4n)^2)$ aparecem em cada soma (ou até menos do que isso).

$$\begin{aligned} & \bullet (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (37^2 - 38^2 - 39^2 + 40^2) = \\ & = \underbrace{(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (37^2 - 38^2 - 39^2 + (4 \times 10)^2)}_{10 \text{ parênteses}} = \\ & = 10 \times 4 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (97^2 - 98^2 - 99^2 + 100^2) = \\ & = \underbrace{(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (97^2 - 98^2 - 99^2 + (4 \times 25)^2)}_{25 \text{ parênteses}} = \\ & = 25 \times 4 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (2017^2 - 2018^2 - 2019^2 + 2020^2) = \\ & = \underbrace{(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (2017^2 - 2018^2 - 2019^2 + (4 \times 505)^2)}_{505 \text{ parênteses}} = \\ & = 505 \times 4 = 2020. \end{aligned}$$



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube **OCTETO MATEMÁTICO**.

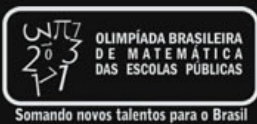


Se for conveniente, você pode obter um arquivo desta página em PDF. Mas, para abrir esse arquivo, é necessário que você tenha o *Adobe Acrobat Reader* instalado no dispositivo que você está utilizando. Caso não tenha, é só clicar **AQUI** para fazer o download.

Se o seu dispositivo já tem o *Adobe Acrobat Reader* instalado, basta copiar o arquivo abaixo e abri-lo sempre que quiser!

Arquivo

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

