.Problema para ajudar na escola: Um cubo perfeito

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Qual o menor número natural que multiplicado por $10!$ resulta em um cubo perfeito não nulo?

Lembrete

Se n é um número natural tal que $n>1$, chamamos de fatorial de n e denotamos por $n!$ o produto $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$, ou seja, o resultado de multiplicar n por todos os números naturais não nulos anteriores a n:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\,.$$

Particularmente, os fatoriais de 0 e 1 são, respectivamente, assim definidos:

$$0! = 1$$
$$1! = 1\,.$$

Solução

- Convém lembrar que um número inteiro positivo é dito um **cubo perfeito** se, escrito como produto de números primos positivos, tiver todos os seus fatores com expoentes múltiplos de 3.

Assim, vamos escrever o número $10!$ como produto de números primos:

$$10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$10! = (5\cdot 2)\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot(2\cdot 3)\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$10! = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\,.$$

Para que os expoentes dos números primos que aparecem na decomposição de $10!$ sejam todos múltiplos de 3, e os menores possíveis, teremos que multiplicar $10!$ por $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2$.

Observe:

$$\begin{aligned} 10!\cdot(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2) &= 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2)\\ &= (2^8\cdot 2)\cdot(3^4\cdot 3^2)\cdot(5^2\cdot 5)\cdot(7\cdot 7^2)\\ &= 2^9\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^3 \end{aligned}$$

e $\boxed{2^9\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^3}$ é um cubo perfeito!

Assim, o menor número pelo qual devemos multiplicar $10!$ para obtermos um cubo perfeito é, de fato, $\boxed{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2 = 4410}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.