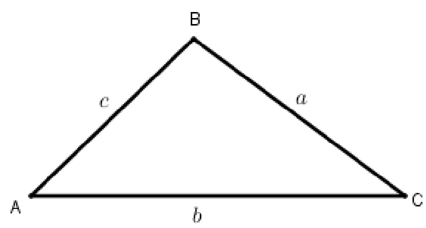
.Sala para leitura_023: Fórmula de Herão

Fórmula de Herão

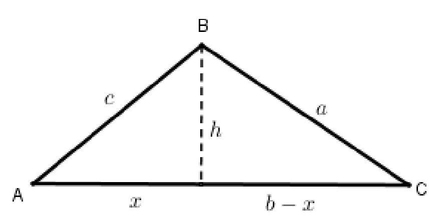
A partir da conhecida fórmula para o cálculo da área do triângulo, $A_t = \dfrac{base \cdot altura}{2}$, podemos deduzir uma fórmula que nos fornece a área de um triângulo, a partir dos seus elementos mais básicos: a medida de seus lados.
Essa fórmula é atribuída a **"Herão de Alexandria"**(ou Heron ou Hero) e nos garante que, em um triângulo ABC qualquer, a área A_t é dada por:

$\boxed{A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, sendo a, b, c os comprimentos dos lados e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo em questão.



Dedução

Fixemos o vértice de ABC que define o ângulo interno com a maior medida, digamos B, e seja h a medida da altura do triângulo ABC, relativa a esse vértice. Consideremos que essa altura divide o lado oposto ao vértice B em dois segmentos cujas medidas são x e $b-x$, conforme figura ao lado.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2. \qquad (i)$$

Ainda pelo Teorema de Pitágoras, temos que $c^2 = x^2 + h^2$, logo,

$$c^2 - h^2 = x^2 \qquad (ii)$$

e

$$x = \sqrt{c^2 - h^2}. \qquad (iii)$$

Dessa forma, por (i), (ii) e (iii), podemos afirmar que:

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} + \left(c^2 - h^2\right)$$

$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} + c^2$$

$$2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$c^2 - h^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2. \qquad (iv)$$

Como $A_t = \dfrac{base \cdot altura}{2}$, então $(A_t)^2 = \dfrac{b^2 \cdot h^2}{4}$; assim, utilizando (iv), segue que:

$$A_t^2 = \frac{b^2\left(c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2\right)}{4} = \frac{b^2\left(c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}\right)}{4}$$

$$A_t^2 = \frac{\cancel{b^2}\left(4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\right)}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{b^2}} = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16}. \qquad (v)$$

Por um momento, façamos $\boxed{z = 2bc}$ e $\boxed{y = b^2+c^2-a^2}$. Assim, de (v), segue que:

$$A_t^2 = \frac{z^2-y^2}{16} = \frac{(z+y)(z-y)}{16}$$

e, portanto,

$$A_t^2 = \frac{(\overbrace{2bc}^{z} + \overbrace{b^2+c^2-a^2}^{y})(\overbrace{2bc}^{z} - (\overbrace{b^2+c^2-a^2}^{y}))}{16} = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b^2+2bc+c^2)-a^2)(-(b^2-2bc+c^2)+a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b+c)^2-a^2)(-(b-c)^2+a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{16}. \qquad (vi)$$

Façamos, agora, $\boxed{q = b+c}$ e $\boxed{k = b-c}$. De (vi), segue que:

$$A_t^2 = \frac{(q^2-a^2)(a^2-k^2)}{16} = \frac{((q+a)(q-a))((a+k)(a-k))}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(q+a)(q-a)(a+k)(a-k)}{16}$$

e, dessa forma,

$$A_t^2 = \frac{(\overbrace{b+c}^{q}+a)(\overbrace{b+c}^{q}-a)(a+\overbrace{b-c}^{k})(a-(\overbrace{b-c}^{k}))}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2} \qquad (vii)$$

Note que, se $\boxed{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$, então:

- $\boxed{\dfrac{b+c-a}{2}} = \dfrac{b+c-a+(a-a)}{2} = \dfrac{b+c+a-2a}{2} = \dfrac{b+c+a}{2} - \dfrac{2a}{2} = \boxed{p-a}$
- $\boxed{\dfrac{a+b-c}{2}} = \dfrac{a+b-c+(c-c)}{2} = \dfrac{a+b+c-2c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{2c}{2} = \boxed{p-c}$
- $\boxed{\dfrac{a-b+c}{2}} = \dfrac{a-b+c+(b-b)}{2} = \dfrac{a+c+b-2b}{2} = \dfrac{a+c+b}{2} - \dfrac{2b}{2} = \boxed{p-b}$

logo, segue de (vii) que:

$$A_t^2 = p\cdot(p-a)\cdot(p-c)\cdot(p-b) = p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c),$$

donde, finalmente,

$$\boxed{A_t = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-c)\,(p-b)}}.$$

Equipe COM – OBMEP