.Sala para leitura_022: Área de um triângulo equilátero

Qual é a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R?

$$\frac{base \cdot altura}{2}$$

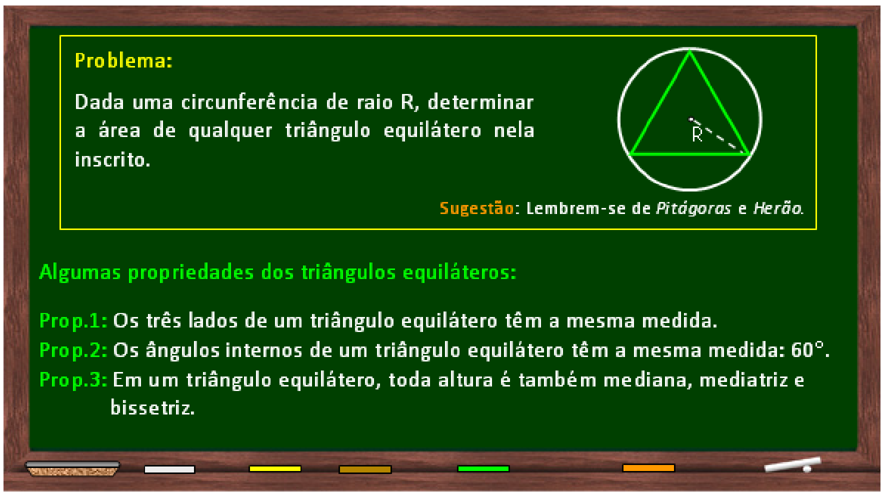
A fórmula que você apresentou está correta, mas observe que você não conhece a base e a altura do triângulo em questão...

Como assim??????

O problema está fornecendo apenas o raio da circunferência na qual o triângulo está inscrito; assim, precisamos de uma fórmula que forneça a área do triângulo em função apenas do raio.

Não se preocupe!
Se você não conhece essa fórmula é só acompanhar a nossa discussão!

Área de um triângulo equilátero



A fórmula mais conhecida para o cálculo da "área de um triângulo qualquer" (ou, mais rigorosamente, "área de uma região triangular") é, de fato,

$$\boxed{A_t = \frac{base \cdot altura}{2}}.$$

No entanto, existem outras fórmulas que nos fornecem essa área, entre elas a de Herão (ou Heron):

$\boxed{A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, sendo a, b, c os comprimentos dos lados do triângulo e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo.

Vamos tomar dois caminhos diferentes e fazer duas soluções para o problema proposto: cada uma utilizando uma das fórmulas apresentadas.

Solução 1

Sabemos que em um triângulo equilátero toda altura é também uma mediana; assim conseguimos relacionar os comprimentos das alturas com os comprimentos dos lados.

Seja, então, ABC um triângulo equilátero cujos lados medem l e, a altura, h.

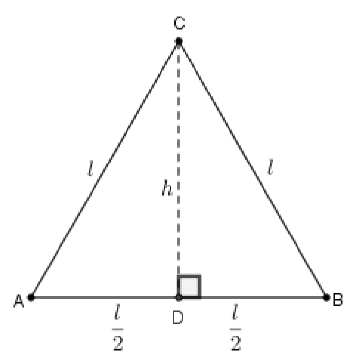
Como a altura $\overline{CD}$ é também a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$, do Teorema de Pitágoras, segue que:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}.$$



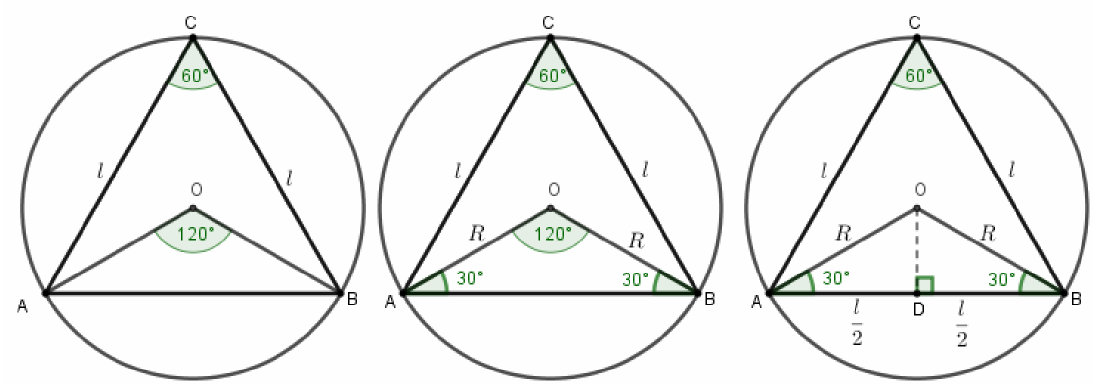
Com isso, a fórmula $A_t = \dfrac{base \cdot altura}{2}$ para a área de um triângulo equilátero de lados com comprimento l pode ser assim reescrita:

$$A_{teq} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}. \qquad (i)$$

O problema não fornece o valor de l, assim, devemos encontrar uma relação entre o lado l de um triângulo equilátero e o raio R da circunferência na qual o triângulo está inscrito. Será o nosso próximo passo e para isso utilizaremos um pouco de trigonometria.

Consideremos, então, o triângulo equilátero ABC inscrito em uma circunferência de centro O e raio R. Sabemos que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° cada, assim, o ângulo central $A\hat{O}B$, relativo ao ângulo inscrito $A\hat{C}B$, mede 120°. (Se você não se lembra da relação entre as medidas de um ângulo inscrito em uma circunferência e de seu respectivo ângulo central, visite **esta Sala** mais tarde.) Portanto, o triângulo isósceles AOB define ângulos de base medindo 30°.

Dessa forma, se D é, uma vez mais, o ponto médio do lado $\overline{AB}$, como o triângulo AOB é isósceles, temos que os triângulos ODB e ODA são triângulos retângulos.



Analisando um dos triângulos retângulos ODB ou ODA e utilizando relações trigonométricas em triângulos retângulos, temos que

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{R}.$$

Assim, como $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, segue que $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l}{2R}$ ou, ainda, $\boxed{l = \sqrt{3}R}$. $\qquad (ii)$

Substituindo esse valor de l em (i), obtemos:

$$A_{teq} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt{3}R\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Dessa forma, a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R é dada por $\boxed{\dfrac{3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$.

Solução 2

A fórmula geral de Herão para triângulos, $A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, fica bastante simplificada para triângulos equiláteros de lados com comprimento l como o nosso:

$$A_{teq} = \sqrt{p(p-l)(p-l)(p-l)}$$

$$A_{teq} = \sqrt{p(p-l)^3}.$$

Triângulos equiláteros com lados de comprimento l têm semiperímetro $\boxed{p = \dfrac{l+l+l}{2} = \dfrac{3l}{2}}$, assim:

$$A_{teq} = \sqrt{\frac{3l}{2}\left(\frac{3l}{2} - l\right)^3}$$

$$A_{teq} = \sqrt{\frac{3l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}$$

$$A_{teq} = \sqrt{3\left(\frac{l}{2}\right)^4}$$

$$\boxed{A_{teq} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}. \qquad (iii)$$

Já temos a relação entre o lado l do nosso triângulo equilátero e o raio R da circunferência; logo, por (ii) e (iii), segue que $A_{teq} = \dfrac{\left(\sqrt{3}R\right)^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $\boxed{A_{teq} = \dfrac{3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$.

Para ver uma demonstração da fórmula de Herão, clique ***AQUI***.