.Problemão: Critério de divisibilidade por 7 para um número de 6 algarismos

Problema

(FOMIM, D.; GENKIN, S. ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: A experiência Russa** – Adaptado) No sistema decimal, considere um número $abcdef$ com seis algarismos, ou seja,

$$abcdef = a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + d\cdot 10^2 + e\cdot 10 + f\cdot 10^0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a\neq 0$.
Sabendo que $abc - def$ é divisível por 7, podemos afirmar que $abcdef$ é divisível por 7?

Vamos ilustrar com um exemplo a situação do problema:

- $abcdef = 210693$
- $210 - 693 = -483 = 7\times(-69)$
- $abcdef = 210693 = 7\times 30099$

Solução

Por hipótese, temos que $abc - def$ é divisível por 7, ou seja, existe um k inteiro, tal que,

$$\boxed{abc - def = 7\cdot k}\,. \qquad (i)$$

(Aqui, as notações abc e def não indicam produtos e sim representações de números de três algarismos no sistema decimal.)

Por outro lado,

$$\begin{aligned} abcdef &= a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + d\cdot 10^2 + e\cdot 10 + f \\ &= 10^3\times(a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c) + d\cdot 10^2 + e\cdot 10 + f \\ &= 10^3\cdot abc + def \\ &= (10^3+1)abc + def - abc \\ &= 1001\cdot abc - (abc{-}def) \\ &= (7\cdot 143)\cdot abc - (abc{-}def). \qquad (ii) \end{aligned}$$

Substituindo (i) em (ii), segue que:

$$abcdef = 7\cdot 143\cdot abc - 7k$$
$$abcdef = 7\cdot(143\cdot abc - k).$$

Note que $n = 143\cdot abc - k$ é um número inteiro; assim,

$$abcdef = 7\cdot n\,,\ \text{com}\ n\in\mathbb{Z}$$

e, portanto, $abcdef$ é divisível por 7.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.