

.Problema: Distribuição de livros



Problema

(SANTOS, J.P.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. Introdução à Análise Combinatória- Adaptado) De quantas maneiras podemos distribuir 98 livros iguais entre 4 escolas? Pode ocorrer o caso de alguma das escolas não receber livro algum.

Lembrete:



Uma das maneiras de agruparmos elementos de um dado conjunto é escolhê-los levando-se em consideração apenas a sua natureza, sem se importar com que ordem eles foram escolhidos ou apresentados. Esse tipo de agrupamento de elementos é denominado uma **Combinação simples**. Especificamente, quando escolhemos r dentre n elementos de um conjunto dessa forma, dizemos que estamos definindo uma Combinação simples de n elementos tomados r a r . E o legal é que, dado um conjunto finito, podemos determinar quantos agrupamentos desse tipo podemos fazer, sem que precisemos exibi-los.

- O número de Combinações simples de n elementos, tomados r a r , é denotado por $C_{n,r}$ ou C_n^r e assim definido:

$$C_{n,r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \text{ com } n, r \in \mathbb{N} \text{ e } r \leq n.$$

Solução

Para solucionar o problema usaremos uma técnica de contagem que aparece na maioria dos livros didáticos como **Combinação Completa**.

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 as quantidades de livros que as escolas E_1, E_2, E_3 e E_4 receberão, respectivamente. Temos, então, que:

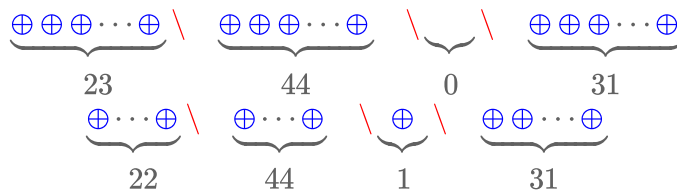
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$, com $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, ou seja, inteiros não negativos.

Observe dois exemplos de distribuição dos 98 livros:

- 23 livros para escola E_1 ;
- 44 livros para escola E_2 ;
- 0 livros para escola E_3 ;
- 31 livros para escola E_4 .
- 22 livros para escola E_1 ;
- 44 livros para escola E_2 ;
- 1 livros para escola E_3 ;
- 31 livros para escola E_4 .

Essas soluções, assim como as demais, podem ser representadas por sequências ordenadas: $(23, 44, 0, 31)$ e $(22, 44, 1, 31)$.

Podemos também representar as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ utilizando 98 sinais \oplus , que representarão os livros a serem distribuídos, e 3 sinais \backslash , que separarão os lotes de livros que cada escola receberá. Particularmente, as soluções $(23, 44, 0, 31)$ e $(22, 44, 1, 31)$ seriam representadas como:



Para distribuir os livros entre as escolas, formaremos uma fila com os 98 símbolos \oplus e usaremos os 3 sinais $|$ para separar os lotes. A pergunta cuja resposta resolve o nosso problema é:

- De quantas maneiras podemos distribuir os 3 $|$ entre os 98 \oplus ?

Podemos pensar que temos $98 + 3 = 101$ posições e destas vamos escolher 3 para colocar os símbolos $|$ ou, se preferir, das $98 + 3 = 101$ posições, vamos escolher 98 para colocar os símbolos \oplus .

A primeira situação equivale a escolher 3 dentre 101 objetos e a segunda equivale a escolher 98 dentre 101 objetos.



Podemos fazer qualquer uma das duas contagens utilizando combinações simples: C_{101}^3 ou C_{101}^{98} , já que uma propriedade da Análise Combinatória nos assegura que $C_{101}^3 = C_{101}^{98}$.

De qualquer forma, o número de maneiras possíveis de distribuir 98 livros entre as 4 escolas pode ser assim calculado:

$$\frac{101!}{98! 3!} = \frac{101 \times 100 \times 99 \times 98!}{98! 3!} = \frac{101 \times 100 \times 99}{6} = \boxed{166\ 650}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Para aprender mais...

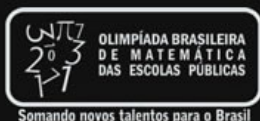


Análise Combinatória – Combinação Completa

Vídeo extraído do Portal da Matemática

Professor Josimar Silva

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Somando novos talentos para o Brasil

Apoio



Realização

