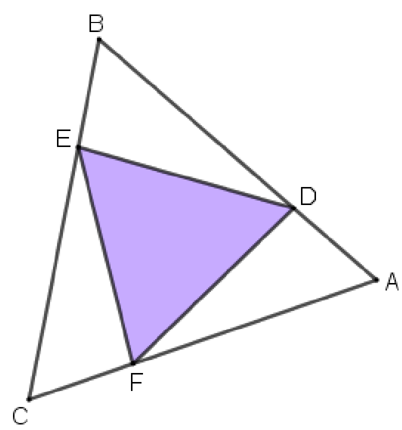
.Problema para ajudar na escola: Área de um triângulo – um belo desafio

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**XXVIII OPM** – 2009) Na figura abaixo, os triângulos ABC e DEF são equiláteros e os segmentos AD e CE medem respectivamente $1\ cm$ e $2\ cm$.



Determinar a medida da área do triângulo DEF.

Lembretes para a Solução

(1) A medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero é 60°.
(2) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.
(3) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido por eles, então estes triângulos são congruentes pelo caso **A.L.A.** .
(4) Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro triângulo e os ângulos internos definidos por esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes pelo caso **L.A.L.** .
(5) A área A_{teq} de um triângulo equilátero de lados com comprimento l pode ser assim calculada:
$$A_{teq} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$
Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

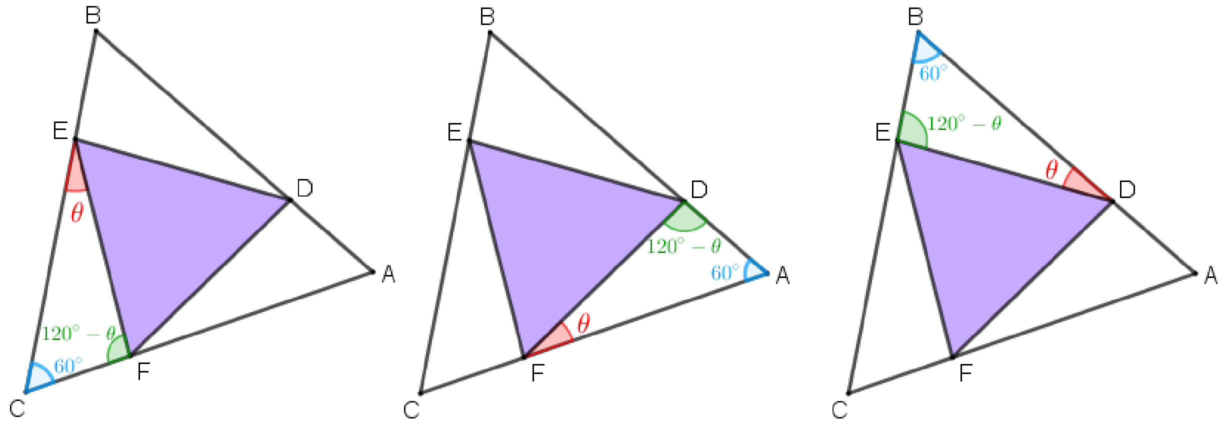
Solução 1

Muitos triângulos e poucas medidas de lados!

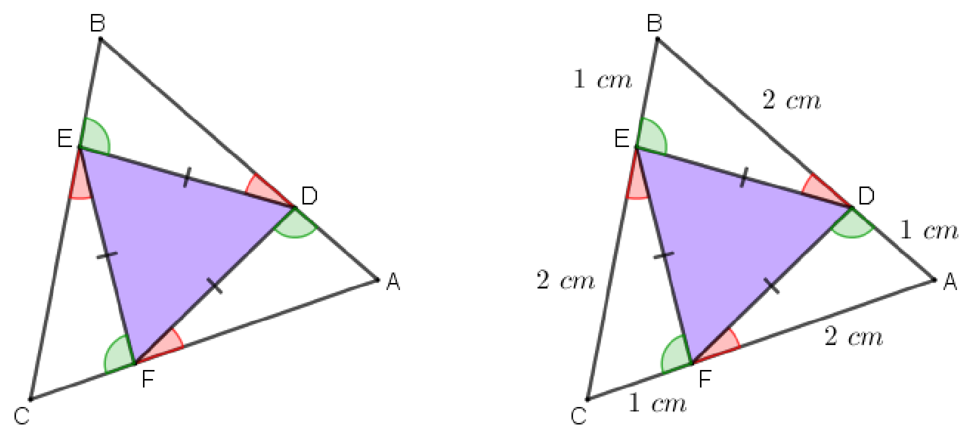
Isso aponta para utilização de semelhança ou congruência de triângulos. Vamos então investigar algumas medidas de ângulos. Para isso, vamos denotar por θ a medida em graus do ângulo $C\hat{E}F$.

- Observe que, como o triângulo ABC é equilátero, então a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é 60°. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180°, consequentemente, a medida do ângulo $E\hat{F}C$ é $180^\circ - 60^\circ - \theta = \boxed{120^\circ - \theta}$.

- Por outro lado, veja que a soma das medidas dos ângulos $E\hat{F}C$, $E\hat{F}D$ e $D\hat{F}A$ é 180° e o triângulo EFD é equilátero. Assim, a medida de $D\hat{F}A$ é $180^\circ - (120^\circ - \theta) - 60^\circ = \boxed{\theta}$ e, consequentemente, a medida do ângulo $A\hat{D}F$ é $180^\circ - \theta - 60^\circ = \boxed{120^\circ - \theta}$.
- Também podemos notar que a soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}F$, $F\hat{D}E$ e $E\hat{D}B$ é 180°. Como o triângulo EFD é equilátero, segue que a medida de $E\hat{D}B$ é $180^\circ - (120^\circ - \theta) - 60^\circ = \boxed{\theta}$ e, então, a medida do ângulo $B\hat{E}D$ é $180^\circ - \theta - 60^\circ = \boxed{120^\circ - \theta}$.

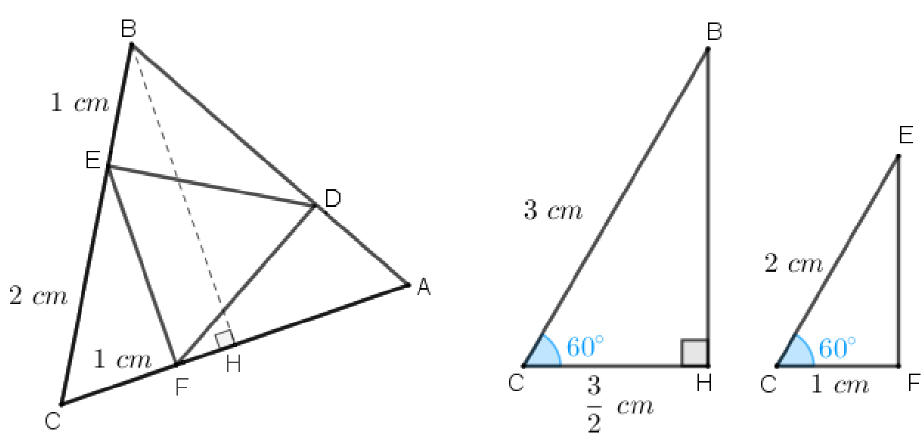


Dessa forma, pelo **caso A.L.A.**, os triângulos EFC, FDA e DEB são congruentes e, portanto, seus lados correspondentes têm a mesma medida.
Como $AD = 1\ cm$ e $CE = 2\ cm$, temos que $AD = BE = CF = 1\ cm$ e $CE = BD = AF = 2\ cm$.

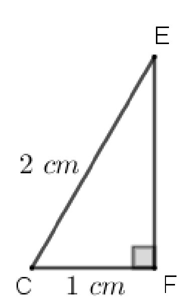


Agora, vamos tentar obter a medida dos lados do triângulo DEF utilizando o triângulo ABC.
No triângulo ABC consideraremos a altura $\overline{BH}$ relativa ao lado $\overline{CA}$. Como ABC é triângulo retângulo, $\overline{BH}$ também é uma mediana; logo $CH = \dfrac{3}{2}\ cm$.
A partir dessa informação, ao observarmos com cuidado os triângulos BCH e ECF podemos concluir que eles são semelhantes, já que os lados $\overline{CH}$ e $\overline{CB}$ são proporcionais aos lados $\overline{CF}$ e $\overline{CE}$, além de esses lados definirem, respectivamente, dois ângulos de 60° :

$$\frac{CH}{CB} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{CF}{CE}.$$



Dessa semelhança de triângulos, concluímos que $E\hat{F}C$ é um ângulo de 90° e, portanto, ECF é um triângulo retângulo. Com isso, podemos obter a medida do segmento $\overline{EF}$ aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CFE:



$EF^2 + 1^2 = 2^2$
$EF^2 = 4 - 1 = 3$
$EF = \pm\sqrt{3}.$

Como $EF > 0$, temos que $\boxed{EF = \sqrt{3}\ cm}$.

Pronto, finalmente temos condições de calcular a medida S da área do triângulo DEF.

Pela fórmula do **Lembrete (5)**, temos que:

$$S = \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

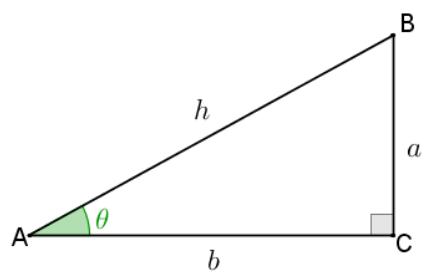
$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Lembretes para a Solução 2

✎ **Definição:** Seja ACB um triângulo retângulo com catetos e hipotenusa com comprimentos $a,\ b,\ h$, respectivamente. Seja θ a medida em graus de um dos ângulos agudos desse triângulo, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Chamamos de *cosseno de* θ, e denotamos por $cos\ \theta$, a razão entre os comprimentos do cateto adjacente a θ e da hipotenusa: $\boxed{cos\ \theta = \frac{b}{h}}$.



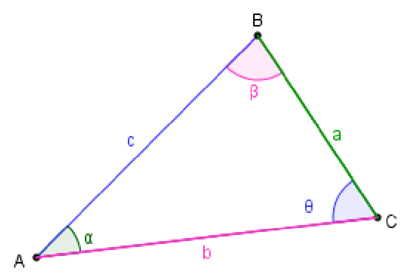
Chamamos de *seno de* θ, e denotamos por $sen\ \theta$, a razão entre os comprimentos do cateto oposto a θ e da hipotenusa: $\boxed{sen\ \theta = \frac{a}{h}}$.

✎ $sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $cos\ 60^\circ = \frac{1}{2}$.

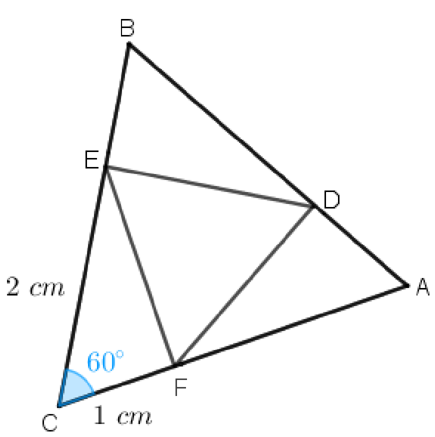
✎ **Lei dos cossenos**:

Para um triângulo ABC da figura ao lado, a lei dos cossenos garante as seguintes relações entre seus lados e seus ângulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha\,;$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \beta;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ \theta\,.$



Solução 2



A partir da determinação dos comprimentos $AD = BE = CF = 1\ cm$ e $CE = BD = AF = 2\ cm$, podemos utilizar a Lei dos cossenos no triângulo CFE para obter rapidamente o comprimento do segmento $\overline{EF}$:

$EF^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot cos\ 60^\circ$
$EF^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{2}$
$EF^2 = 3$
$EF = \pm\sqrt{3}.$

Como $EF > 0$, temos que $\boxed{EF = \sqrt{3}\ cm}$.

Vamos finalizar esta solução utilizando a definição de seno de um ângulo para calcular o comprimento h da altura do triângulo EFD e, consequentemente, a medida S de sua área.

- $sen\ 60^\circ = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

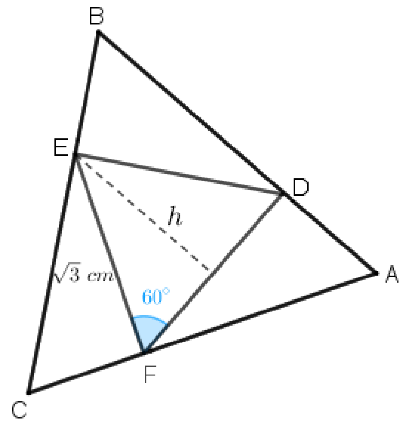
  $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

  $h = \dfrac{3}{2}\ cm.$

- $S = \dfrac{base \times altura}{2}$

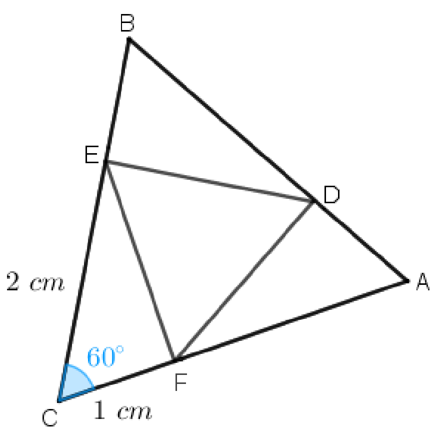
  $S = \dfrac{\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2}$

  $\boxed{S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2}$.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 3



A partir da determinação dos comprimentos $AD = BE = CF = 1\ cm$ e $CE = BD = AF = 2\ cm$, podemos utilizar a Lei dos cossenos no triângulo CFE para obter rapidamente o comprimento do segmento $\overline{EF}$:

$$EF^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot cos\ 60^\circ$$

$$EF^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$EF^2 = 3$$

$$EF = \pm\sqrt{3}.$$

Como $EF > 0$, temos que $\boxed{EF = \sqrt{3}\ cm}$.

Utilizando a fórmula do **Lembrete (5)**, temos que:

$$S = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.