



## .Problema para ajudar na escola: Vértices coloridos



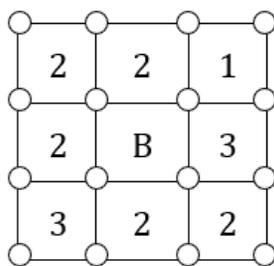
### Problema

(A partir do 7º ano do E. F.)

(ONEM – 2008) Alguns dos dezesseis vértices do tabuleiro  $3 \times 3$  mostrado na figura deverão ser coloridos e, em cada quadradinho do tabuleiro, está indicada a quantidade de vértices que devem ser coloridos no respectivo quadradinho.

- Por exemplo, o número 2 que aparece no primeiro quadradinho da primeira linha indica que esse quadradinho deverá ter exatamente dois vértices coloridos.

No entanto, a pessoa encarregada de indicar os números nos nove quadradinhos se enganou e colocou uma letra no lugar do número do quadradinho central.



Quais as possibilidades de valores para  $B$ ?

### Solução

Para a solução deste problema, denotaremos por  $Q_{n,m}$  o quadradinho que está na linha  $n$  e na coluna  $m$  do tabuleiro.

(i) Vamos começar a nossa análise observando o quadradinho que está na segunda linha e na terceira coluna do tabuleiro, o qual denotaremos por  $Q_{2,3}$ .

- Vemos que três dos quatro vértices do quadradinho  $Q_{2,3}$  devem ser pintados; logo, pelo menos um de seus vértices superiores e pelo menos um de seus vértices inferiores devem ser pintados. Mas devemos pintar apenas um dos vértices do quadradinho  $Q_{1,3}$  acima dele; assim exatamente um de dois vértices superiores de  $Q_{2,3}$  deve ser pintado e, conseqüentemente, devem ser pintados os seus dois vértices inferiores. Vamos colorir esses dois vértices inferiores na **Figura 1**, abaixo.
- Como apenas um dos vértices do quadradinho  $Q_{1,3}$  deve ser pintado e já sabemos que um dos seus vértices inferiores vai ser pintado, os dois vértices superiores de  $Q_{1,3}$  não serão pintados. Para lembrar desse fato, vamos retirar os dois pequenos círculos que demarcam esses vértices no tabuleiro mostrado na **Figura 1**. Não colorimos nenhum vértice superior de  $Q_{1,3}$ , pois não sabemos exatamente qual será colorido.
- Já sabemos que os dois vértices inferiores do quadradinho  $Q_{2,3}$  serão pintados. Logo, como apenas dois dos vértices do quadradinho  $Q_{3,3}$  serão pintados, necessariamente os dois vértices inferiores de  $Q_{3,3}$  não serão pintados. Igualmente, vamos retirar os dois pequenos círculos que demarcam esses vértices no tabuleiro mostrado na **Figura 1**.

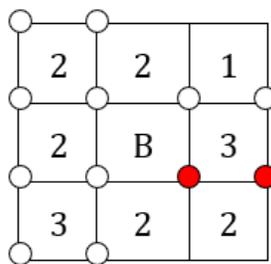


Figura 1

(ii) Agora, vamos observar o quadradinho do canto inferior esquerdo do tabuleiro, o  $Q_{3,1}$ .

- Vemos que três dos vértices de  $Q_{3,1}$  devem ser pintados, mas não podemos pintar os seus dois vértices à direita; pois, se assim o fizéssemos, o quadradinho  $Q_{3,2}$  ficaria com três de seus vértices coloridos e isso não é possível, já que ele tem apenas dois vértices a serem pintados. Dessa forma os dois vértices esquerdos de  $Q_{3,1}$  serão necessariamente pintados. Registraremos essa conclusão colorindo esses dois vértices na **Figura 2**. Não iremos colorir um dos vértices à esquerda de  $Q_{3,1}$ , pois não temos informação sobre qual será pintado.

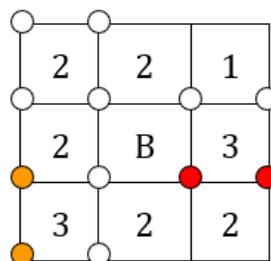


Figura 2

(iii) Finalmente, vamos tentar obter informações sobre o quadradinho central em questão, isto é, o quadradinho  $Q_{2,2}$ .

- Já sabemos que pelo menos o vértice inferior direito de  $Q_{2,2}$  vai ser colorido. No entanto não podemos colorir apenas esse vértice, pois, se assim fosse, teríamos problemas com o quadradinho  $Q_{1,2}$ : como temos que pintar dois dos três vértices de  $Q_{1,2}$  possíveis de serem pintados, necessariamente um dos vértices superiores de  $Q_{2,2}$  vai ser pintado.

Logo,  $B \neq 1$ .

- Tampouco podemos ter  $B = 4$ , pois, se isso ocorresse, teríamos três vértices de  $Q_{2,1}$  pintados. E isso não poder ocorrer, já que a informação que temos é que  $Q_{2,1}$  tem apenas dois de seus vértices coloridos.

Portanto,  $B \neq 4$ .

- Restam dois valores para  $B$ : 2 e 3. Para garantir que os dois valores são possíveis, mostraremos duas configurações para o tabuleiro que mostram que, de fato,  $B$  pode assumir esses dois valores.

Na **Figura 3** consideramos  $B = 2$  e na **Figura 4** consideramos  $B = 3$ .

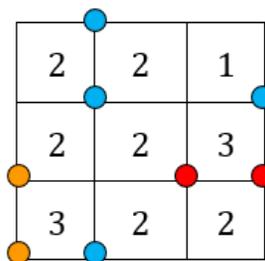


Figura 3

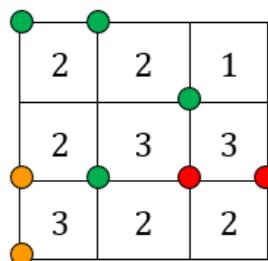


Figura 4

Observe que poderíamos também ter feito a configuração mostrada na **Figura 5** para  $B = 2$  e a configuração da **Figura 6** para  $B = 3$ .

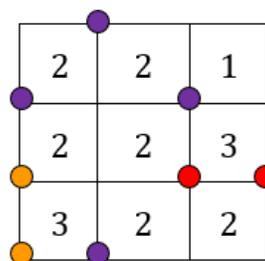


Figura 5

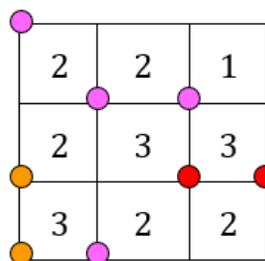
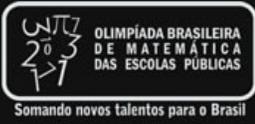


Figura 6

De qualquer forma, **são duas as possibilidades de valores para  $B$** :  $B = 2$  ou  $B = 3$ .

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

