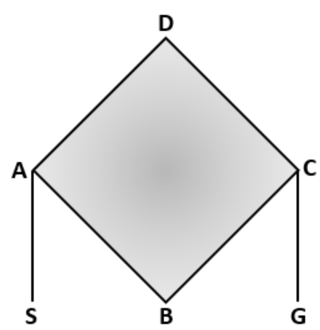
.Problema para ajudar na escola: Vamos jogar?

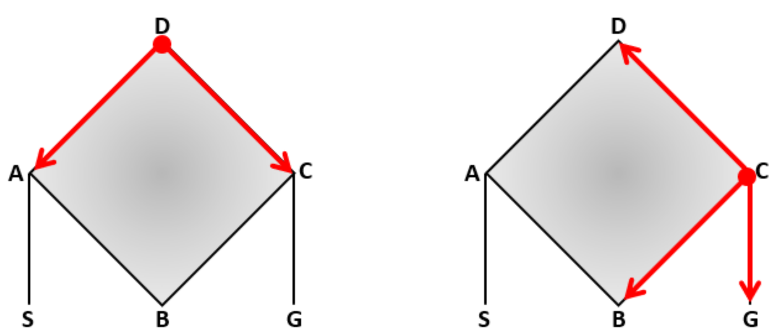
Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**XXIX Olimpíada Madri**, 1993 – Adaptado) Matheus ganhou um jogo eletrônico em cuja tela aparece um esquema como o mostrado na figura abaixo.



Nesse jogo, cada partida é jogada da seguinte forma:
(1) No início da partida, uma bola aparece no ponto **S**.
(2) Cada vez que o jogador toca na tela, essa bola se move até a extremidade oposta de um dos segmentos com extremidade no ponto onde a bola se encontra. Por exemplo, se a bola está sobre o ponto **D**, ela poderá se mover apenas para o ponto **A** ou para o ponto **C**; mas se a bola estiver sobre o ponto **C**, outro exemplo, ela poderá se movimentar até **B** ou **D** ou **G**.



(3) A partida termina quando ocorrer o primeiro de um destes dois casos:

- A bola volta para o ponto S, e neste caso o jogador perde a partida.
- A bola chega no ponto G, e então o jogador ganha a partida.

Se a chance de, estando em um ponto, a bola se mover para qualquer dos pontos possíveis é a mesma, qual **probabilidade é maior: a de o jogador ganhar ou a de ele perder?**

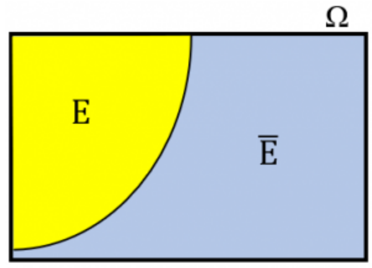
AJUDA

Dada uma progressão geométrica infinita $(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \cdots, a_1 \cdot q^{n-1}, \cdots)$ de razão q, $0 < q < 1$, o limite da soma de todos os seus termos pode ser calculado pela fórmula

$$S = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Sabemos que um evento E pode ocorrer ou não. Se o evento E for relativo a um espaço amostral Ω, o evento associado à não ocorrência de E é denominado o ***complementar de E com relação a Ω*** e é denotado por $\overline{E}$.

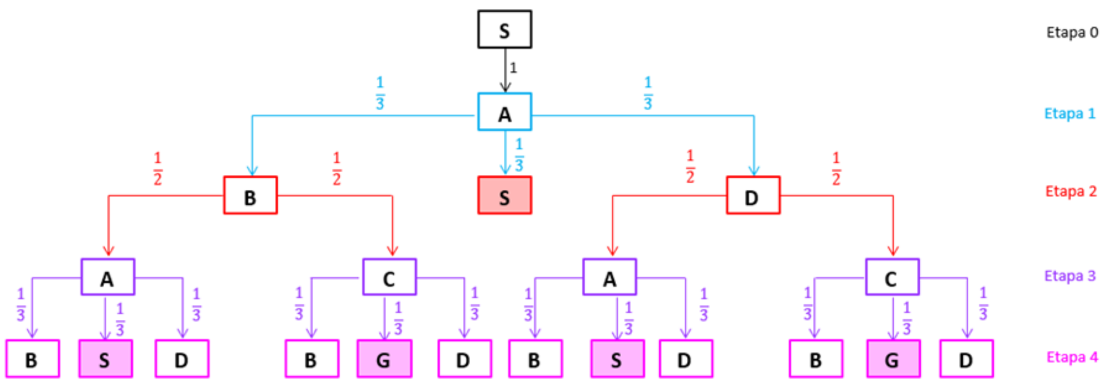
- Logo, $\overline{E}$ ocorre se, e somente se, E não ocorrer.



Dessa forma, se P for a probabilidade de que o evento E ocorra (sucesso) e Q for a probabilidade de que E não ocorra (insucesso), então Q é a probabilidade do evento complementar $\overline{E}$, ou simplesmente probabilidade complementar de P, e temos a seguinte relação: $\boxed{P+Q=1}$.

Solução

Podemos representar as quatro primeiras etapas possíveis para o jogo utilizando o diagrama de árvore abaixo.



(i) Vamos, inicialmente, determinar a possibilidade de o jogador ganhar uma partida do jogo.

- Observe pelo diagrama que o jogador não consegue ganhar na primeira, nem na segunda e nem na terceira etapa.
- A primeira chance para o jogador ganhar é na quarta etapa e existem dois caminhos independentes:

$$S \to A \to B \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to D \to C \to G\,.$$

A probabilidade de isso acontecer é:

$$P_4 = \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

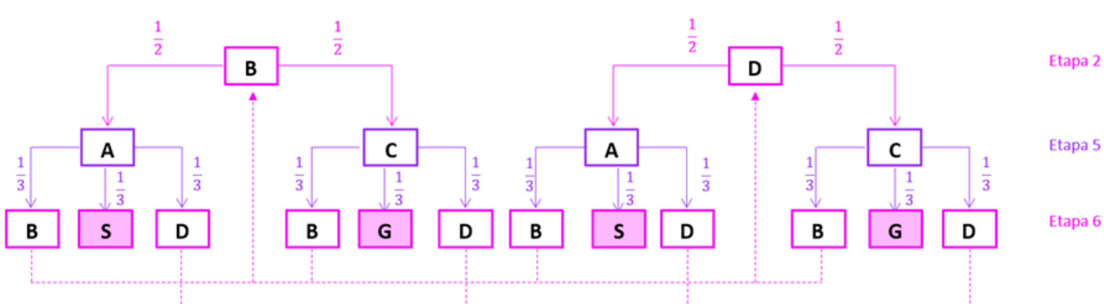
$$P_4 = 2 \times \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P_4 = \frac{1}{3^2}}.$$

- A próxima chance de o jogador vencer é na sexta etapa. Para que isso ocorra, temos oito caminhos diferentes:

$$S \to A \to B \to A \to B \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to B \to A \to D \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to B \to C \to B \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}}$$
$$S \to A \to B \to C \to D \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to D \to A \to B \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to D \to A \to D \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}}$$
$$S \to A \to D \to C \to B \to C \to G \quad \boxed{\text{ou}} \quad S \to A \to D \to C \to D \to C \to G \quad .$$

Esses caminhos equivalem a, ao chegar na Etapa 4, voltar para a Etapa 2, refazer a Etapa 3 como Etapa 5 e refazer a Etapa 4 como Etapa 6.



Vamos então calcular a probabilidade de se ganhar a partida na sexta etapa:

$$P_6 = \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+}$$
$$\left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+}$$
$$\left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxed{+} \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$P_6 = 8 \times \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P_6 = \frac{2}{3^3}}.$$

- A terceira chance de o jogador vencer é na oitava etapa. Para que isso ocorra, temos trinta e dois caminhos distintos. Esses caminhos podem ser visualizados no quadro abaixo.

<table>
<tr><td colspan="32">S</td><td>Etapa 0</td></tr>
<tr><td colspan="32">A</td><td>Etapa 1</td></tr>
<tr><td colspan="16">B</td><td colspan="16">D</td><td>Etapa 2</td></tr>
<tr><td colspan="8">A</td><td colspan="8">C</td><td colspan="8">A</td><td colspan="8">C</td><td>Etapa 3</td></tr>
<tr><td colspan="4">B</td><td colspan="4">D</td><td colspan="4">B</td><td colspan="4">D</td><td colspan="4">B</td><td colspan="4">D</td><td colspan="4">B</td><td colspan="4">D</td><td>Etapa 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">C</td><td>Etapa 5</td></tr>
<tr><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>D</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>Etapa 7</td></tr>
<tr><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>G</td><td>Etapa 8</td></tr>
</table>

A probabilidade de cada um desses caminhos é a mesma; portanto, a probabilidade de o jogador ganhar na oitava etapa pode ser assim calculada:

$$P_8 = \underbrace{\left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxplus \cdots \boxplus \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)}_{32\, parcelas}$$

$$P_8 = 32 \times \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P_8 = \frac{2^2}{3^4}}.$$

- Observe que o jogador só pode vencer em etapas pares, a partir da terceira e, de maneira geral, a probabilidade de o jogador vencer na Etapa $2n$, n um número natural maior do que 1, é dada por:

$$\boxed{P_{2n} = \frac{2^{n-2}}{3^n}}.$$

Pelo até aqui exposto, temos que o jogador vencerá em uma Etapa par maior do que 3, mas não sabemos exatamente em qual Etapa, ou seja, o jogador vencerá na Etapa 4 **ou** Etapa 6 **ou** Etapa 8 **ou** Etapa 10 **ou ...**

Dessa forma, a probabilidade de o jogador vencer a partida é:

$$P_v = P_4 + P_6 + P_8 + P_{10} + \cdots + P_{2n} + \cdots$$

$$P_v = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \cdots.$$

Para calcular a soma P_v de infinitas parcelas, observe que $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2^2}{3^4}, \frac{2^3}{3^5}, \cdots, \frac{2^{n-2}}{3^n}, \cdots\right)$ é uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{2}{3}$. Portanto, utilizando a fórmula do lembrete, temos que:

$$P_v = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \cdots$$

$$P_v = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}$$

$$P_v = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1}$$

$$\boxed{P_v = \frac{1}{3}}.$$

(ii) Vamos agora analisar a probabilidade de o jogador perder uma partida no jogo.

Perceba que a contagem das possibilidades de o jogador perder é igual a de ele ganhar, a menos de um detalhe: o jogador pode perder na Etapa 2.

Vejamos:

- Observe no diagrama inicial que o jogador não consegue perder na primeira etapa.
- A primeira possibilidade de o jogador perder é na segunda etapa e para isso existe apenas um caminho:

$$S \to A \to S.$$

A probabilidade de isso acontecer é:

$$P_2 = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- A próxima chance de o jogador perder é na quarta etapa. Para que isso ocorra, temos dois caminhos diferentes:

$$S \to A \to B \to A \to S \qquad \boxed{\text{ou}} \qquad S \to A \to D \to A \to S.$$

A probabilidade de isso acontecer é:

$$P_4 = \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \boxplus \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$P_4 = 2 \times \left(1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P_4 = \frac{1}{3^2}}.$$

- As próximas etapas nas quais o jogador poderá perder são as Etapas 6, 8, 10, etc. e os cálculos das probabilidades de perda são exatamente iguais aos cálculos das probabilidades de o jogador ganhar nas respectivas etapas.

Aqui também sabemos que o jogador poderá perder na Etapa 2 **ou** na Etapa 4 **ou** na Etapa 6 **ou** na Etapa 8 **ou** na Etapa 10 **ou ...** Mas não sabemos exatamente em qual Etapa.

Dessa forma, a probabilidade de o jogador perder a partida é:

$$P_p = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 + P_{10} + \cdots + P_{2n} + \cdots$$
$$P_p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \cdots .$$

Como já calculamos a soma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \cdots = \frac{1}{3} \ ,$$

segue que

$$P_p = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \cdots\right)$$
$$P_p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$
$$P_p = \frac{2}{3} .$$

Poderíamos ter poupado esses cálculos se tivéssemos utilizado a “probabilidade complementar” apresentada na **AJUDA**.

Nesse caso, o evento E é "o jogador ganhar uma partida" e o evento $\overline{E}$ é "o jogador perder a partida".

Assim, como os eventos são independentes, segue que:

$$\boxed{P_p} = Q = 1 - P = 1 - P_v = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Observação: Perceba que a probabilidade de $\boxed{\frac{1}{3}}$ de o jogador vencer a partida e de $\boxed{\frac{2}{3}}$ de ele perder são resultados teóricos. Nenhuma partida terá duração infinita, já que nenhum jogador viverá eternamente para jogar infinitas vezes.

Os resultados práticos seriam:

- ► quanto mais etapas o jogador jogar, mais a probabilidade de ele ganhar se aproxima de $\frac{1}{3}$;
- ► quanto mais etapas o jogador jogar, mais a probabilidade de ele perder se aproxima de $\frac{2}{3}$.

A tabela abaixo ilustra essas duas afirmações.

Probabilidade de o jogador ganhar	**Probabilidade de o jogador perder**
	Até a Etapa 2: $\frac{1}{3} \approx 33,33\%$
Até a Etapa 4: $\frac{1}{9} \approx 11,11\%$	Até a Etapa 4: $\frac{4}{9} \approx 44,44\%$
Até a Etapa 6: $\frac{5}{27} \approx 18,52\%$	Até a Etapa 6: $\frac{14}{27} \approx 51,85\%$
Até a Etapa 8: $\frac{19}{81} \approx 23,46\%$	Até a Etapa 8: $\frac{46}{27} \approx 56,79\%$
Até a Etapa 10: $\frac{65}{243} \approx 26,75\%$	Até a Etapa 10: $\frac{146}{243} \approx 60,08\%$
Até a Etapa 12: $\frac{211}{729} \approx 28,94\%$	Até a Etapa 12: $\frac{454}{729} \approx 62,28\%$
Até a Etapa 14: $\frac{665}{2187} \approx 30,41\%$	Até a Etapa 14: $\frac{1394}{2187} \approx 63,74\%$
$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{\frac{1}{3} \approx 33,33\%}$	$\boxed{\frac{2}{3} \approx 66,67\%}$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.