.Problema para ajudar na escola: Uma diferença desafiadora!

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**LV Olimpiada Matemática Española**, 2019 – Adaptado) Para cada número natural $n=abcd$ de quatro dígitos, denotaremos por D o valor absoluto da diferença $abcd{-}dcba$, ou seja, $D=|abcd{-}dcba|$.
Por exemplo:

- se $n=2632$, o número D correspondente seria $D=|2632-2362|=270$;
- se $n=1784$, o número D correspondente seria $D=|1784-4871|=3087$;
- se $n=5336$, o número D correspondente seria $D=|5336-6335|=999$.

Observe nesses exemplos que 270 e 3087 não são múltiplos de 37, mas 999 o é:
$37\times 27=999$.
(a) Se para um número natural $n=abcd$ temos que $D=|abcd{-}dcba|$ é um múltiplo 37, o que podemos afirmar sobre os algarismos $a,\ b,\ c$ e d?
(b) Verifique que a condição que você determinou é também suficiente para que, com as hipóteses do problema, D seja múltiplo de 37.

(Aqui, as notações $abcd$ e $dcba$ não indicam produtos e sim representações de números de quatro algarismos no sistema decimal.)

Solução

(a) Seja $n=abcd$ um número natural com quatro dígitos tal que $D=|abcd{-}dcba|$ seja um múltiplo 37.

- O problema solicita que determinemos condições sobre os dígitos do número n. Para isso, vamos considerar inicialmente que $a\geqslant d$; neste caso, $abcd{-}dcba\geqslant 0$ e, portanto, $D=abcd{-}dcba$.

Observe que podemos escrever
$$abcd=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d$$
e
$$dcba=1000\cdot d+100\cdot c+10\cdot b+a.$$

$$\begin{array}{rl} a000 & \\ b00 & + \\ c0 & \\ d & \\ \hline abcd & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} d000 & \\ c00 & + \\ b0 & \\ a & \\ \hline dcba & \end{array}.$$

Com isso:
$$D=abcd{-}dcba$$
$$D=(1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d)-(1000\cdot d+100\cdot c+10\cdot b+a)$$
$$D=(1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d)-(1000\cdot d+100\cdot c+10\cdot b+a)$$
$$D=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d-1000\cdot d-100\cdot c-10\cdot b-a$$
$$D=999\cdot a+90\cdot b-90\cdot c-999\cdot d$$
$$D=999\cdot(a-d)+90\cdot(b-c)$$
$$D=3^3\cdot 37\cdot(a-d)+2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c).\qquad (i)$$
Como D é um múltiplo 37, então existe um número natural k tal que $D=37\cdot k$. Logo, segue de (i), que
$$37\cdot k=3^3\cdot 37\cdot(a-d)+2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c)$$
$$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c)=37\cdot k-3^3\cdot 37\cdot(a-d)$$
$$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c)=37\cdot\left(k-3^3\cdot(a-d)\right).\qquad (ii)$$
Da igualdade (ii) podemos concluir que o produto $\boxed{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c)}$ é um múltiplo de 37.
Mas 37 é um número primo; logo, para que o produto $\boxed{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(b-c)}$ seja múltiplo de 37, ou "o 37

deve aparecer explicitamente como fator desse produto" ou "esse produto é 0".

– No entanto, como b e c são algarismos, a diferença $b-c$ é tal que $-9 \leqslant b-c \leqslant 9$ e, com isso, não temos um fator 37 no produto $\boxed{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (b-c)}$.

– Consequentemente $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (b-c) = 0$, donde concluímos que $\boxed{b=c}$.

- Para fecharmos a solução deste item, precisamos considerar o caso em que $a < d$. Aqui, $abcd – dcba < 0$ e, portanto, $D = dcba - abcd$.

  A demonstração neste caso segue exatamente os mesmos passos da demonstração anterior, bastando apenas substituir $D = abcd - dcba$ por $D = dcba - abcd$ nos cálculos efetuados.

Finalizando, pelo exposto, concluímos que:

- **Se $n = abcd$ é um número natural com quatro dígitos tal que $D = |abcd – dcba|$ seja um múltiplo 37, então necessariamente $b = c$, ou seja, os dígitos centrais de n (algarismos das centena e dezena) são iguais.**

(b) Ao provarmos no item anterior que a igualdade dos dígitos centrais de n é uma consequência de a diferença D ser múltipla de 37, estamos logicamente afirmando que, nas condições do problema, a afirmação $b = c$ é uma condição ***necessária*** para que D seja um múltiplo de 37.
O que vamos fazer neste item é provar que $b = c$ é uma condição ***suficiente*** para que D seja um múltiplo de 37, ou seja, basta que
a igualdade dos dígitos centrais de n aconteça para que D seja um múltiplo de 37.
Vamos lá!
Seja $n = abcd$ um número natural com quatro dígitos tal que $b = c$.
Dessa forma, se $D = |abcd – dcba|$, então segue que:

$$
\begin{aligned}
&D = |abbd – dbba| \\
&D = |(1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot b + d) - (1000 \cdot d + 100 \cdot b + 10 \cdot b + a)| \\
&D = |(1000 \cdot a + 110 \cdot b + d) - (1000 \cdot d + 110 \cdot b + a)| \\
&D = |1000 \cdot a + 110 \cdot b + d - 1000 \cdot d - 110 \cdot b - a| \\
&D = |999 \cdot a - 999 \cdot d| \\
&D = 999 \cdot |a-d| \\
&D = 3^3 \cdot 37 \cdot |a-d|\,. \qquad\qquad (iii)
\end{aligned}
$$

Como $|a-d|$ é um número natural, podemos concluir de (iii) que D é um múltiplo de 37.
Portanto,

- **Se $n = abcd$ é um número natural com quatro dígitos tal que $b = c$, então $D = |abcd – dcba|$ é um múltiplo 37.**

Passando a limpo os dois itens do problema, provamos que:

- Se $n = abcd$ é um número natural com quatro dígitos tal que $D = |abcd – dcba|$ seja um múltiplo 37, então $b = c$.
- Se $n = abcd$ é um número natural com quatro dígitos tal que $b = c$, então $D = |abcd – dcba|$ é um múltiplo 37.

De outra forma, sendo $n = abcd$ um número natural com quatro dígitos e $D = |abcd – dcba|$, provamos que:

- Se D é um múltiplo 37, então $b = c$.
- Se $b = c$, então D é um múltiplo 37.

Podemos juntar essas duas condições em uma única frase escrevendo que acabamos de provar a seguinte afirmação:

- Sejam $n = abcd$ um número natural com quatro dígitos e $D = |abcd – dcba|$. Então, D é um múltiplo 37 se, e somente se, $b = c$.

Para saber um pouco mais sobre o significado lógico das expressões "condição necessária" e "condição suficiente", visite **esta Sala para Leitura** do nosso Blog.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.