.Problema para ajudar na escola: Um primo desafiador!

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**Olimpíada Espanhola de Matemática**, 2018) Para quais números naturais não nulos n e m o número

$$\boxed{X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2}$$

é primo?

Solução

Observe, inicialmente, que podemos reescrever assim o número X:

$$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$
$$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 + (mn - mn)$$
$$X = n^2 + 2019mn + 2019m + n - 2019m^2 - mn$$
$$X = \left(n^2 + n - mn\right) + \left(2019mn + 2019m - 2019m^2\right)$$
$$X = n\,(n + 1 - m) + 2019m\,(n + 1 - m)$$
$$X = (n + 2019m)\,(n + 1 - m)\,.$$

Como por hipótese $n, m \geqslant 1$, então $(n + 2019m) > 1$. Assim, para que X seja um número primo, necessariamente

$(n + 2019m)$ é um número primo **e** $(n + 1 - m) = \pm 1$. (Se você estranhou a condição de que $(n + 1 - m) = -1$, observe que m e n são positivos, mas X pode ser negativo.)

Vamos analisar a condição $(n + 1 - m) = \pm 1$

(i) Se $(n + 1 - m) = 1$, então $n = m$ e, neste caso, teríamos

$$n + 2019m = n + 2019n = 2020n = 2 \times (1010n).$$

Como $(1010n) > 1$, **o fator** $(n + 2019m)$ **não seria um número primo**.

(ii) Se $(n + 1 - m) = -1$, então $n = m - 2$ e, agora, teríamos

$$n + 2019m = (m - 2) + 2019m = 2020m - 2 = 2 \times (1010m - 1)$$

Como $(1010m - 1) > 1$, **o fator** $(n + 2019m)$ **também não seria um número primo**.

Dessa forma, não existem números naturais não nulos n e m tais que $\boxed{X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2}$ seja primo.

No entanto, se abrirmos mão da condição de n e m serem não nulos, obtemos o primo $X = 2$ fazendo $m = 0$ e $n = 1$. E esse será o único X primo, mesmo sendo n e m naturais não necessariamente nulos:

- para $n = 0$, X será um múltiplo de 2019 para qualquer número natural m;
- para $m = 0$ e $n = 1$, teremos $X = 2$, que é um número primo;
- para $m = 0$ e $n > 1$, teremos $X = n(n + 1)$, ou seja, X é um número par maior do que 2 e, portanto, não é um número primo.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.