

.Problema para ajudar na escola: Um primo desafiador!



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(Olimpíada Espanhola de Matemática, 2018) Para quais números naturais não nulos n e m o número

$$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

é primo?

Solução

Observe, inicialmente, que podemos reescrever assim o número X :

$$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

$$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 + (mn - mn)$$

$$X = n^2 + 2019mn + 2019m + n - 2019m^2 - mn$$

$$X = (n^2 + n - mn) + (2019mn + 2019m - 2019m^2)$$

$$X = n(n + 1 - m) + 2019m(n + 1 - m)$$

$$X = (n + 2019m)(n + 1 - m).$$

Como por hipótese $n, m \geq 1$, então $(n + 2019m) > 1$. Assim, para que X seja um número primo, necessariamente

$(n + 2019m)$ é um número primo e $(n + 1 - m) = \pm 1$. (Se você estranhou a condição de que $(n + 1 - m) = -1$, observe que m e n são positivos, mas X pode ser negativo.)

Vamos analisar a condição $(n + 1 - m) = \pm 1$

(i) Se $(n + 1 - m) = 1$, então $n = m$ e, neste caso, teríamos

$$n + 2019m = n + 2019n = 2020n = 2 \times (1010n).$$

Como $(1010n) > 1$, o fator $(n + 2019m)$ não seria um número primo.

(ii) Se $(n + 1 - m) = -1$, então $n = m - 2$ e, agora, teríamos

$$n + 2019m = (m - 2) + 2019m = 2020m - 2 = 2 \times (1010m - 1)$$

Como $(1010m - 1) > 1$, o fator $(n + 2019m)$ também não seria um número primo.

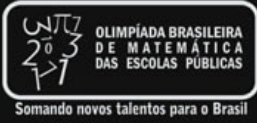
Dessa forma, não existem números naturais não nulos n e m tais que

$X = n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$ seja primo.

No entanto, se abrimos mão da condição de n e m serem não nulos, obtemos o primo $X = 2$ fazendo $m = 0$ e $n = 1$. E esse será o único X primo, mesmo sendo n e m naturais não necessariamente nulos:

- para $n = 0$, X será um múltiplo de 2019 para qualquer número natural m ;
- para $m = 0$ e $n = 1$, teremos $X = 2$, que é um número primo;
- para $m = 0$ e $n > 1$, teremos $X = n(n + 1)$, ou seja, X é um número par maior do que 2 e, portanto, não é um número primo.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

impa

