



.Problema para ajudar na escola: Obtendo quadrados perfeitos



Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

Um número natural A é dito um **quadrado perfeito** se existir um número natural n tal que $A = n^2$. Assim, um quadrado perfeito é simplesmente o produto de um número natural por si próprio: $A = n^2 = n \cdot n$.

Preencha a tabela abaixo utilizando os 16 primeiros números naturais não nulos, sem repetição, de modo que a soma de dois "números vizinhos" seja um quadrado perfeito.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Solução

Observe inicialmente que o menor e o maior número resultante da soma de dois números naturais distintos escolhidos dentre os 16 primeiros números naturais não nulos são $1 + 2 = 3$ e $15 + 16 = 31$, respectivamente. Por outro lado, os quadrados perfeitos entre 3 e 31 são $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ e $25 = 5^2$, e esses quatro quadrados perfeitos podem ser escritos como soma de números naturais distintos entre 1 e 16 das seguintes formas:

- $4 = 1 + 3$;
- $9 = 1 + 8$; $9 = 2 + 7$; $9 = 3 + 6$; $9 = 4 + 5$;
- $16 = 1 + 15$; $16 = 2 + 14$; $16 = 3 + 13$; $16 = 4 + 12$; $16 = 5 + 11$; $16 = 6 + 10$; $16 = 7 + 9$;
- $25 = 9 + 16$; $25 = 10 + 15$; $25 = 11 + 14$; $25 = 12 + 13$.

Para melhor visualização dos vizinhos possíveis para cada número, vamos construir uma tabela com todas as combinações possíveis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
3		1														= 4
8	7	6	5	4	3	2	1									= 9
15	14	13	12	11	10	9		7	6	5	4	3	2	1		= 16
								16	15	14	13	12	11	10	9	= 25

Note que os números 8 e 16 só podem ter um vizinho, já que são parcelas de apenas uma soma cada um; esses vizinhos são 1 e 9, respectivamente. Dessa forma, 8 e 16 ficarão nos extremos da tabela.

8	1															9	16
16	9															1	8

Veja que o 1 e o 3 têm três possíveis vizinhos, mas os números restantes têm apenas dois possíveis vizinhos. Particularmente, o segundo vizinho do 9 é o 7 e com isso completamos mais um espaço das duas possíveis tabelas.

