



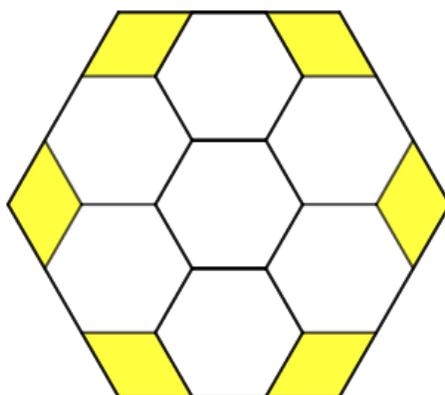
.Problema para ajudar na escola: Losangos amarelos



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(XII Concurso de Primavera de Matemáticas, 2008 – Adaptado) Todos os hexágonos que aparecem na figura abaixo são regulares.



Se a área do hexágono maior mede 810 cm^2 , quanto mede a área colorida de amarelo?



Lembretes

(1) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n > 2$) é dada por:

$$S_{i_n} = (n - 2) \times 180^\circ.$$

(2) Todo quadrilátero convexo que tenha ângulos opostos com a mesma medida é um paralelogramo.

(3) A área A_{teq} de um triângulo equilátero de lados com comprimento l pode ser assim calculada:

$$A_{teq} = \frac{l^2 \times \sqrt{3}}{4}.$$

(4) A área A_h de um hexágono regular de lados com comprimento l pode ser assim calculada:

$$A_h = \frac{l^2 \times 3 \times \sqrt{3}}{2}.$$

(5) Se um triângulo isósceles possui um ângulo de 60° , então esse triângulo é equilátero.

Solução 1

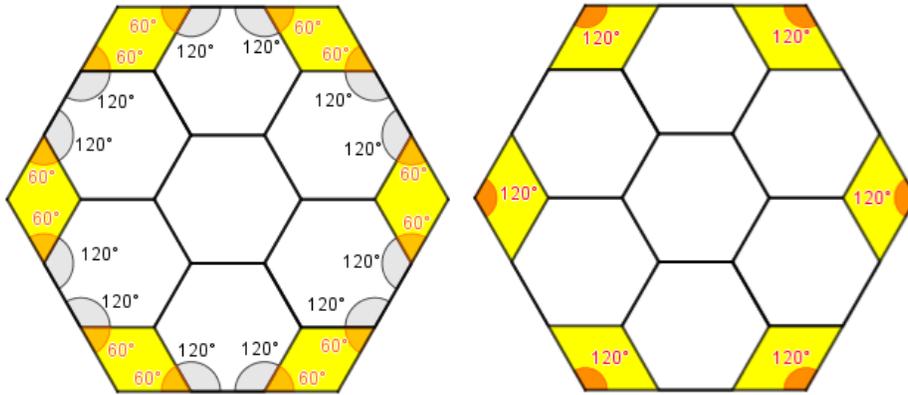
Observe que todos os hexágonos são convexos; assim, a soma das medidas dos ângulos internos de cada hexágono da figura pode ser assim calculada:

$$S_{i_6} = (6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ.$$

Como os hexágonos da figura são regulares, seus ângulos internos têm a mesma medida:

$$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ .$$

Assim, cada quadrilátero amarelo tem dois ângulos opostos de 60° (cada um é suplemento de um ângulo interno de um hexágono pequeno) e um terceiro ângulo que é ângulo do hexágono maior e portanto mede 120° .



Dessa forma, como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é dada por

$$S_{i_4} = (4 - 2) \times 180^\circ = 360^\circ ,$$

segue que a medida do quarto ângulo interno de cada quadrilátero amarelo é igual a

$$360^\circ - 2 \times 60^\circ - 120^\circ = 120^\circ .$$

Com isso, concluímos que cada quadrilátero amarelo tem ângulos opostos com a mesma medida, o que nos garante que cada um é um paralelogramo. Mas como todos os hexágonos que aparecem na figura são regulares e o hexágono central tem lados em comum com os seis outros hexágonos pequenos, então todos os lados dos hexágonos pequenos têm o mesmo comprimento. Dessa forma,

- os quadriláteros amarelos são losangos com a mesma área.

Por outro lado, sabemos que a área do hexágono maior mede 810 cm^2 ; assim, se L é o comprimento em centímetros dos lados desse hexágono, segue do **Lembrete 4** que:

$$810 = \frac{L^2 \times 3 \times \sqrt{3}}{2}$$

$$L^2 = \frac{540}{\sqrt{3}} .$$

Como $L > 0$, segue ainda que:

$$L = \sqrt{\frac{540}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{36 \times 15}{\sqrt{3}}} = 6 \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}} \text{ cm} .$$

Agora, se l é o comprimento dos lados dos hexágonos pequenos, e conseqüentemente dos lados dos losangos amarelos, então:

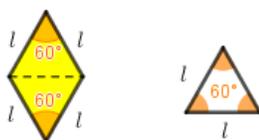
$$L = 3l$$

$$6 \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}} = 3l$$

$$l = 2 \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}} \text{ cm} .$$

Perceba que para finalizar o problema precisamos calcular a área de um losango cujo lado mede $l = 2 \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}} \text{ cm}$.

Para tanto, observe que a diagonal menor de cada losango amarelo divide-o, a princípio, em dois triângulos isósceles. Mas, como o ângulo oposto a essa diagonal mede 60° , esses triângulos, na verdade, são equiláteros, de acordo com o **Lembrete 5** . Logo, utilizando o **Lembrete 3** , podemos concluir que a área A_{l_a} de cada losango amarelo é dada por:



$$A_{la} = 2 \times \frac{l^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{la} = 2 \times \frac{\left(2 \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}}\right)^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{la} = 2 \times \frac{4 \times \frac{15}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \cancel{\sqrt{3}}}{4}$$

$$A_{la} = 2 \times \frac{\cancel{4} \times 15}{\cancel{4}}$$

$$A_{la} = 2 \times 15$$

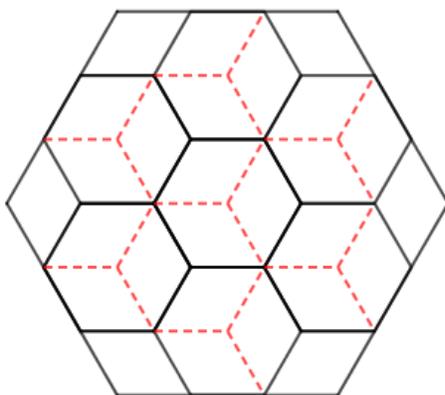
$$A_{la} = 30 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área colorida de amarelo mede 6×30 , ou seja, 180 cm^2 .

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Poderíamos ter evitado os cálculos da solução anterior, se tivéssemos observado que cada hexágono pequeno da figura é regular e pode ser dividido em três losangos a partir de seus respectivos centros, como indicado na figura abaixo. Particularmente, cada um desses losangos tem a mesma área dos losangos amarelos da figura inicial.



Com isso, o hexágono maior pode ser dividido em $7 \times 3 + 6 = 27$ losangos com áreas equivalentes às áreas dos losangos amarelos e, com isso, a área A_{la} de cada losango amarelo é dada por:

$$A_{la} = \frac{810}{27}$$

$$A_{la} = 30 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área colorida de amarelo mede 6×30 , ou seja, 180 cm^2 .

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.