.Problema para ajudar na escola: Quadrados perfeitos em P.A.'s

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**XXX Olimpíada Madri**, 1994 – Adaptado) Observe as seguintes progressões aritméticas infinitas:

▶ $6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, \cdots$

▶ $1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, \cdots$

Em cada exemplo, observe que, depois de aparecer um quadrado perfeito, outros quadrados perfeitos surgiram na sequência. Essa propriedade foi uma mera coincidência ou, de fato,

- **se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então infinitos termos dessa progressão são também quadrados perfeitos?**

Solução

A característica apresentada pelas duas progressões que ilustram o problema é, de fato, uma propriedade geral. Assim:

Se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então infinitos termos dessa progressão são também quadrados perfeitos

Para provar essa propriedade, mostraremos que é verdadeira a seguinte afirmação:

- **Em uma progressão aritmética de infinitos inteiros positivos, a partir de qualquer termo que seja um quadrado perfeito, é possível construir outro.**

Observe, inicialmente, que se provarmos essa afirmação, automaticamente a propriedade em questão estará provada, já que:

▶ ao encontrarmos um termo da P.A. que seja um quadrado perfeito, construímos um segundo termo que seja quadrado perfeito;

▶ a partir desse segundo quadrado perfeito, construímos um terceiro;

▶ a partir desse terceiro quadrado perfeito, construímos um quarto;

▶ a partir desse quarto quadrado perfeito, construímos um quinto;

▶ e assim sucessivamente.

Vamos à prova!

- Seja
$$S = (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \cdots)$$
uma progressão aritmética infinita de inteiros positivos com razão r, com r um número inteiro positivo.
Agora, sendo a um número natural, suponha que a^2 seja um termo dessa P.A.:
$$S = \left(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \cdots, a^2, \cdots\right) .$$
Considere o número $m = (a + r)^2$ e observe que:
(i) m é um número inteiro;
(ii) m é um quadrado perfeito;
(iii) $m = (a + r)^2 = a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + \underbrace{(2a + r)}_{\substack{número\\natural}} r.$
Assim, por (i), (ii) e (iii), concluímos que m é um quadrado perfeito que é termo da sequência. Particularmente, $m > a^2$ e temos:
$$S = \left(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \cdots, a^2, \cdots, (a + r)^2, \cdots\right) .$$

Vamos exibir mais alguns quadrados perfeitos dessa sequência S:

$a^2 \rightarrow (a + r)^2$

$(a + r)^2 \rightarrow ((a + r) + r)^2 = (a + 2r)^2$

$$(a+2r)^2 \to ((a+2r)+r)^2 = (a+3r)^2$$
$$(a+3r)^2 \to ((a+3r)+r)^2 = (a+4r)^2$$
$$(a+4r)^2 \to ((a+4r)+r)^2 = (a+5r)^2$$

e assim:

$$S = \left(a_1, a_1+r, a_1+2r, a_1+3r, \cdots, a^2, \cdots, (a+r)^2, \cdots, (a+2r)^2, \cdots, (a+3r)^2, \cdots, (a+4r)^2, \cdots, (a+5r)^2, \cdots\right).$$

Vale observar que nem todos os quadrados perfeitos que aparecem nesse tipo de sequência são necessariamente da forma indicada Assim, exstem muito mais quadrados perfeitos do que aqueles que nós garantimos a existência!

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.