.Problema para ajudar na escola: O número 600

Problema

(A partir do 7º ano do E. F.)

(a) Quantos divisores naturais possui o número 600?

(b) Quantos desses divisores são pares?

(c) Quantos são ímpares?

(d) Quantos são quadrados perfeitos?

Ajuda (1) – Princípio Fundamental da Contagem

Se

- uma escolha **E1** puder ser feita de m_1 maneiras,
- uma escolha **E2** puder ser feita de m_2 maneiras,
- uma escolha **E3** puder ser feita de m_3 maneiras,
- e todas essas escolhas forem independentes entre si,

então a quantidade de maneiras em que as três escolhas ocorrem ao mesmo tempo é $\boxed{m_1 \times m_2 \times m_3}$.

(Se você não se lembra desse Princípio, clique **AQUI**.)

Ajuda (2) – Número de divisores

Se m é um número natural não nulo cuja decomposição como produto de potências de primos é

$$m = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3} ,$$

então o número de divisores naturais de m é

$$(n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \times (n_3 + 1) .$$

(Se você não se lembra desse resultado, clique **AQUI**.)

Solução

(a) A decomposição de 600 em fatores primos é $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$.
Assim, um divisor natural de 600 é, necessariamente, um número da forma

$$2^x \times 3^y \times 5^z, \text{ com } x \in \{0,1,2,3\} , \ y \in \{0,1\} \ \text{ e } \ z \in \{0,1,2\} .$$

Como temos quatro escolhas distintas para o expoente x, duas escolhas distintas para y e três escolhas para z, o Princípio Fundamental da Contagem nos garante que existem $\boxed{4 \times 2 \times 3 = 24}$ divisores naturais de 600.
Veja o esqueminha dessa contagem:

$$\frac{4 \text{ escolhas}}{\text{expoente } x} \quad \frac{2 \text{ escolhas}}{\text{expoente } y} \quad \frac{3 \text{ escolhas}}{\text{expoente } z}.$$

- Poderíamos também solucionar este item utilizando o resultado apresentado na **Ajuda (2)**:
  Como a decomposição de 600 em fatores primos é $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, então 600 tem
  $$(3+1) \times (1+1) \times (2+1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$$
  divisores naturais.

(b) Para que um divisor natural de 600 seja par, é necessário e suficiente que o fator 2 esteja presente na sua decomposição em fatores primos.

Perceba que essa condição ocorre quando $x = 1, 2, 3$; assim, neste caso, o Princípio Fundamental da Contagem nos garante que existem $\boxed{3 \times 2 \times 3 = 18}$ divisores naturais pares de 600.

Veja o esqueminha dessa contagem:

$$\frac{3 \text{ escolhas}}{\text{expoente } x} \quad \frac{2 \text{ escolhas}}{\text{expoente } y} \quad \frac{3 \text{ escolhas}}{\text{expoente } z}.$$

(c) Para que um divisor natural de 600 seja ímpar, é necessário e suficiente que o fator 2 não esteja presente na sua decomposição em fatores primos.

Observe que essa condição só ocorre quando $x = 0$; assim, o Princípio Fundamental da Contagem nos garante que existem $\boxed{1 \times 2 \times 3 = 6}$ divisores naturais ímpares de 600.

Veja o esqueminha dessa contagem:

$$\frac{1 \text{ escolha}}{\text{expoente } x} \quad \frac{2 \text{ escolhas}}{\text{expoente } y} \quad \frac{3 \text{ escolhas}}{\text{expoente } z}.$$

- Poderíamos também conseguir esse número lembrando que o número de divisores naturais ímpares é igual ao número total de divisores naturais menos o número de divisores naturais pares, ou seja, $24 - 18 = 6$.

(d) Um número natural é quadrado perfeito se, e somente se, na sua decomposição em fatores primos só aparecem expoentes pares.

Desse modo, como $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{0, 1\}$ e $z \in \{0, 1, 2\}$, temos duas escolhas possíveis para x, uma para y e duas para z. Logo, o Princípio Fundamental da Contagem nos garante que existem $\boxed{2 \times 1 \times 2 = 4}$ divisores naturais de 600 que são quadrados perfeitos.

Último esqueminha de contagem:

$$\frac{2 \text{ escolhas}}{\text{expoente } x} \quad \frac{1 \text{ escolha}}{\text{expoente } y} \quad \frac{2 \text{ escolhas}}{\text{expoente } z}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.