



.Problema para ajudar na escola: Números binomiais



Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Calcule S , sabendo-se que

$$S = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}}{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}}.$$

Observação: A notação $\binom{n}{p}$ indica o número binomial de n por p .



Lembrete

Se n e p são números naturais tais que $p \leq n$, definimos o número binomial $\binom{n}{p}$ por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Solução 1

(1) Calculemos o numerador.

$$\begin{aligned} \frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5} &= \frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \frac{18!}{(18-5)!5!} \\ &= \frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \frac{18!}{13!5!} \\ &= \frac{21 \times 20 \times 19 \times 18!}{13! \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} \\ &= \frac{21!}{13!8!} \quad (i) \end{aligned}$$

(2) Calculemos, agora, o denominador.

• Observe que:

$$\begin{aligned} \binom{18}{5} + \binom{18}{12} &= \frac{18!}{(18-5)!5!} + \frac{18!}{(18-12)!12!} \\ &= \frac{18!}{13!5!} + \frac{18!}{6!12!} = \frac{18! \times 6 + 18! \times 13}{13!6!} \\ &= \frac{18! \times (6+13)}{13!6!} = \frac{18! \times 19}{13!6!} \\ &= \frac{19!}{13!6!} \quad (ii) \end{aligned}$$

- Observe também que:

$$\begin{aligned} \binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} &= \left[\binom{18}{5} + \binom{18}{12} \right] + \binom{19}{12} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{19!}{13!6!} + \binom{19}{12} = \frac{19!}{13!6!} + \frac{19!}{(19-12)!12!} \\ &= \frac{19!}{13!6!} + \frac{19!}{7!12!} = \frac{19! \times 7 + 19! \times 13}{13!7!} \\ &= \frac{19! \times (7+13)}{13!7!} = \frac{19! \times 20}{13!7!} \\ &= \frac{20!}{13!7!} \quad (iii) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \boxed{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}} &= \left[\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} \right] + \binom{20}{8} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{20!}{13!7!} + \binom{20}{8} = \frac{20!}{13!7!} + \frac{20!}{(20-8)!8!} \\ &= \frac{20!}{13!7!} + \frac{20!}{12!8!} = \frac{20! \times 8 + 20! \times 13}{13!8!} \\ &= \frac{20! \times (8+13)}{13!8!} = \frac{20! \times 21}{13!8!} \\ &= \boxed{\frac{21!}{13!8!}} \quad (iv) \end{aligned}$$

(3) Por (i) e (iv), segue que:

$$S = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}}{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}} = \frac{\frac{21!}{13!8!}}{\frac{21!}{13!8!}} = 1.$$

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.



Ferramentas que podem ajudar na segunda solução

Duas propriedades dos números binomiais podem encurtar a solução deste problema:

$$\mathbf{P1:} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

$$\mathbf{P2:} \quad \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Solução 2

- Numerador:

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}} &= \frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \frac{18!}{(18-5)!5!} \\ &= \frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \frac{18!}{13!5!} \\ &= \frac{21 \times 20 \times 19 \times 18!}{13! \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} \\ &= \boxed{\frac{21!}{13!8!}} \quad (i) \end{aligned}$$

• Denominador:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}} &\stackrel{(P1)}{=} \binom{18}{13} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{12} \\
 &= \left[\binom{18}{13} + \binom{18}{12} \right] + \binom{19}{12} + \binom{20}{12} \\
 &\stackrel{(P2)}{=} \binom{19}{13} + \binom{19}{12} + \binom{20}{12} \\
 &= \left[\binom{19}{13} + \binom{19}{12} \right] + \binom{20}{12} \\
 &\stackrel{(P2)}{=} \binom{20}{13} + \binom{20}{12} \\
 &\stackrel{(P2)}{=} \boxed{\binom{21}{13}} \quad (ii)
 \end{aligned}$$

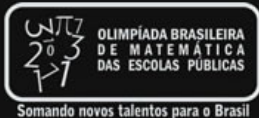
• Por (i) e (ii), temos que:

$$S = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}}{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}} = \frac{\frac{21!}{13! 8!}}{\frac{21!}{13! 8!}} = 1.$$

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.

Gincana de 2017 – Clubes de Matemática da OBMEP
Nível B – Questão Difícil

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVACÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

