.Sala para leitura_026: Linguagem matemática: Implicações e equivalências

Linguagem matemática

Implicações e equivalências

Em uma teoria matemática, a partir de conceitos já conhecidos, outros conceitos vão sendo definidos e, portanto, palavras e expressões novas vão, continuamente, surgindo. Mas, independente do assunto, existem algumas expressões e palavras que são utilizadas com frequência e com significados próprios e bem definidos em textos matemáticos; neste tópico, vamos discutir um pouco sobre os significados de algumas delas.
Observamos que o interesse, aqui, não é estudar lógica matemática; queremos, apenas, que **vocês se sintam mais seguros e confortáveis quando da leitura e compreensão das definições e proposições que aparecem nas nossas Salas**.

Nesta nossa breve discussão, P e Q representarão propriedades que se referem a elementos genéricos de um dado conjunto não vazio U. Assim, por exemplo, podemos ter:

- U: conjunto dos triângulos de um plano;
  - P: T é equilátero;
  - Q: T é isósceles.

- U: conjunto dos números naturais;
  - P: a é par;
  - Q: a é múltiplo de 5.

- U: conjunto das retas de um plano;
  - P: r e s são paralelas;
  - Q: r e s são perpendiculares.

Implicações

Se P e Q são propriedades que se referem a elementos de um dado conjunto não vazio U, então as cinco expressões:

- se P, então Q
- P implica Q
- P acarreta Q
- P é condição suficiente para Q
- Q é condição necessária para P

têm todas o mesmo significado. Elas querem dizer, simplesmente, que:

- **todo elemento do conjunto U que tem a propriedade P também tem a propriedade Q**.

Para exprimir esse fato, é comum utilizarmos a seguinte notação: $P \Rightarrow Q$. Dessa forma, se considerarmos os conjuntos:

$A = \{\, a \in U$, tal que a tem a propriedade $P\,\}$

$B = \{\, b \in U$, tal que b tem a propriedade $Q\,\}$

então escrevemos $P \Rightarrow Q$ para significar que $A \subset B$.

Nessas condições, é comum, também, utilizarmos a notação $P \not\Rightarrow Q$ para indicar a negação de $P \Rightarrow Q$. Logo, a notação $P \not\Rightarrow Q$ indica que

- **nem todo elemento do conjunto U que tem a propriedade P também tem a propriedade Q**

ou, de outra forma, indica que

- **é possível encontrar, pelo menos, um elemento do conjunto U que tenha a propriedade P e que não tenha a propriedade Q.**

Resumindo:

> Se P e Q são propriedades que se referem a elementos de um dado conjunto não vazio U, usamos as notações $P \Rightarrow Q$ e $P \not\Rightarrow Q$ para indicar que:
>
> - $P \Rightarrow Q$: **todo elemento do conjunto U que tem a propriedade P também tem a propriedade Q.**
> - $P \not\Rightarrow Q$**: é possível encontrar, pelo menos, um elemento do conjunto U que tenha a propriedade P e que não tenha a propriedade Q.**

Equivalências

Se, novamente, P e Q forem propriedades que se referem a elementos de um dado conjunto não vazio U, também as expressões:

- P é condição necessária e suficiente para Q
- P se, e somente se, Q
- P e Q são equivalentes

têm todas o mesmo significado. Elas querem dizer que "$P \Rightarrow Q$" e "$Q \Rightarrow P$", ou seja, que, simultaneamente,

- **"todo elemento do conjunto U que tem a propriedade P também tem a propriedade Q" e "todo elemento do conjunto U que tem a propriedade Q também tem a propriedade P"**,

fato que denotamos como: $P \Leftrightarrow Q$. Portanto, se considerarmos, uma vez mais, os conjuntos

$A = \{\, a \in U$, tal que a tem a propriedade $P\,\}$

$B = \{\, b \in U$, tal que b tem a propriedade $Q\,\}$

então escrever $P \Leftrightarrow Q$ significa que $A = B$.

Também é comum utilizarmos uma notação para indicar a negação de $P \Leftrightarrow Q$. Assim, a notação $P \not\Leftrightarrow Q$ indica que P e Q não são equivalentes, ou seja, que, pelo menos, uma das seguintes situações ocorre: $P \not\Rightarrow Q$; $Q \not\Rightarrow P$.

Resumindo:

> Se P e Q são propriedades que se referem a elementos de um dado conjunto não vazio U, usamos as notações $P \Leftrightarrow Q$ e $P \not\Leftrightarrow Q$ para indicar que:
>
> - $P \Leftrightarrow Q$: $P \Rightarrow Q$ **e** $Q \Rightarrow P$;
> - $P \not\Leftrightarrow Q$: $P \not\Rightarrow Q$ **ou** $Q \not\Rightarrow P$.

Algumas observações

(i) Observe atentamente a utilização dos símbolos $\boxed{\subset \ \not\subset \ = \ \Leftrightarrow \ \not\Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \not\Rightarrow}$:

- Utilizamos $\boxed{\subset \ \not\subset \ =}$ entre conjuntos.
- Utilizamos $\boxed{\Leftrightarrow \ \not\Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \not\Rightarrow}$ entre propriedades.

(ii) **O símbolo $\Rightarrow$ não significa "então".**
Assim, não escreva coisas do tipo

- Se x e y são inteiros ímpares $\Rightarrow x+y$ é um número ímpar.
- Se $6|a \Rightarrow 3|a$.

O correto seria:

- "x e y são inteiros ímpares" $\Rightarrow$ "$x+y$ é um número ímpar".
- $6|a \Rightarrow 3|a$.

(iii) Quando as frases que descrevem duas propriedades P e Q forem muito longas, não coloque a implicação $P \Rightarrow Q$ (ou a equivalência $P \Leftrightarrow Q$) no meio de outra frase; isole-a em uma outra linha. Por exemplo:

- Suponha que x e y sejam números inteiros. Assim, temos a seguinte propriedade:
  " x e y ímpares" $\Rightarrow$ "$x+y$ ímpar".

Exemplos

Vamos construir frases matemáticas verdadeiras, utilizando os símbolos $\boxed{\Leftrightarrow \ \not\Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \not\Rightarrow}$. Tente justificar a veracidade de cada uma.

(i) Considere
- ➤ U: conjunto dos triângulos de um plano;
  - ➤ P: T é equilátero;
  - ➤ Q: T é isósceles.

Então:

- $P \Rightarrow Q$.
  ou
  "T é equilátero" $\Rightarrow$ "T é isósceles".
- $Q \not\Rightarrow P$.
  ou
  "T é isósceles" $\not\Rightarrow$ "T é equilátero".
- $P \not\Leftrightarrow Q$.
  ou
  "T é equilátero" $\not\Leftrightarrow$" T é isósceles".

(ii) Considere
- ➤ U: conjunto dos números naturais;
  - ➤ P: a é par;
  - ➤ Q: a é múltiplo de 5.

Então:

- $P \not\Rightarrow Q$.
  ou
  "a é par" $\not\Rightarrow$ "a é múltiplo de 5".

- $Q \nRightarrow P$.
  ou
  "a é múltiplo de 5" $\nRightarrow$ "a é par".
- $P \nLeftrightarrow Q$.
  ou
  "a é par" $\nLeftrightarrow$ "a é múltiplo de 5".

(iii) (Ampliando a utilização) Considere:

➤ U: conjunto dos números naturais.

Então:

- "x é par e y é par" $\Rightarrow$ $x+y$ é par".
- "$x+y$ é par" $\nRightarrow$ "x é par e y é par"
- "x é ímpar e y é ímpar" $\Rightarrow$ $x+y$ é par".
- "$x+y$ é par" $\nRightarrow$ "x é ímpar e y é ímpar" .

As expressões "se, então" e "se, e somente se" são de extrema importância para a leitura e compreensão de textos de matemática; portanto vamos resumir e registrar suas características.

Sejam P e Q propriedades que se referem a elementos de um dado conjunto não vazio U. As cinco expressões

se P, então Q **P implica Q** **P acarreta Q**	**P é condição suficiente para Q** **Q é condição necessária para P**

têm todas o mesmo significado:

todo elemento do conjunto U que satisfaz P também satisfaz Q.

Para exprimir esse fato, utilizamos a seguinte notação: $P \Rightarrow Q$.

Também as expressões

P é condição necessária e suficiente para Q
P se, e somente se, Q
P e Q são equivalentes

têm o mesmo significado.

Elas querem dizer que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, ou seja, que

"todo elemento do conjunto U que satisfaz P também satisfaz Q" *e*
"todo elemento do conjunto U que satisfaz Q também satisfaz P".

Denotamos esse fato por $P \Leftrightarrow Q$.

Equipe COM – OBMEP