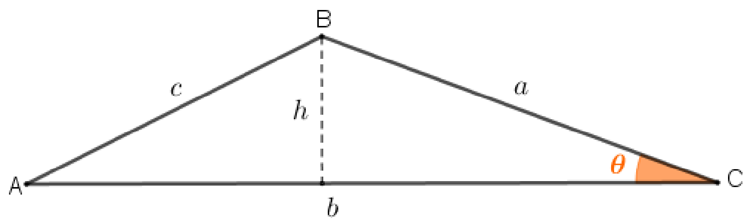
Fórmula de Herão: Dedução 3

Dedução 3

Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC, sendo que o vértice B é o que define o ângulo interno com a maior medida, e seja h a medida da altura do triângulo ABC, relativa a esse vértice. Veja a figura ao lado.



Sabemos que a área de um triângulo é dada por $\dfrac{base \times altura}{2}$.

Assim, se A_t é a área do triângulo ABC, então particularmente temos que:

$$A_t = \frac{b \times h}{2}. \qquad (i)$$

Vamos procurar uma expressão para h, a partir dos comprimentos a, b e c.

Observe que, utilizando a definição do seno de um determinado ângulo, obtemos que $sen\,\theta = \dfrac{h}{a}$, ou seja, $h = a\,sen\,\theta$.

Dessa forma, podemos reescrever a igualdade (i) da seguinte forma:

$$A_t = \frac{ab}{2} sen\,\theta. \qquad (ii)$$

Vejamos, agora, o que fazer com o $sen\,\theta$.

Note que:

- pela Lei Fundamental da Trigonometria, temos que $sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$ e, assim, $\boxed{sen^2\,\theta = 1 - cos^2\,\theta}$;
- pela Lei dos Cossenos, temos que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\theta$ e, assim, $\boxed{cos\,\theta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$.

Portanto, $sen^2\,\theta = 1 - \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2$. Vamos desenvolver algebricamente essa igualdade e para isso vamos utilizar seguidamente dois produtos notáveis:

- $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y), \forall\ x, y \in \mathbb{R};\qquad (iii)$
- $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2, \forall\ x, y \in \mathbb{R}.\qquad (iv)$

Vamos lá:

$$
\begin{aligned}
sen^2\,\theta &= 1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2} \\
&= \frac{4a^2b^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2} \\
&= \frac{1}{4a^2b^2}\left[(2ab)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right] \\
&\overset{(iii)}{=} \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left((2ab) - \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\cdot\left((2ab) + \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\cdot\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left(c^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right)\cdot\left(\left(a^2 + 2ab + b^2\right) - c^2\right)\right] \\
&\overset{(iv)}{=} \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left(c^2 - (a-b)^2\right)\cdot\left((a+b)^2 - c^2\right)\right] \\
&\overset{(iii)}{=} \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left((c-(a-b))\cdot(c+(a-b))\right)\cdot\left(((a+b)-c)\cdot((a+b)+c)\right)\right] \\
&= \frac{1}{4a^2b^2}\left[\left((c-a+b)\cdot(c+a-b)\right)\cdot\left((a+b-c)\cdot(a+b+c)\right)\right]. \qquad (v)
\end{aligned}
$$

Veja que, se $\boxed{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$, então $2p = a+b+c$ e com isso:

- $c+b = 2p-a$, donde $\boxed{c-a+b} = (c+b)-a = (2p-a)-a = 2p-2a\,,$
- $c+a = 2p-b$, donde $\boxed{c+a-b} = (c+a)-b = (2p-b)-b = 2p-2b\,,$
- $a+b = 2p-c$, donde $\boxed{a+b-c} = (a+b)-c = (2p-c)-c = 2p-2c\,.$

Logo, segue de (v) que:

$$
\begin{aligned}
sen^2\,\theta &= \frac{1}{4a^2b^2}\left[((2p-2a)\cdot(2p-2b))\cdot((2p-2c)\cdot(2p))\right] \\
sen^2\,\theta &= \frac{1}{4a^2b^2}\left[2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot(2p)\right] \\
sen^2\,\theta &= \frac{16}{4a^2b^2}\left[p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\right] \\
sen^2\,\theta &= \frac{4}{a^2b^2}\left[p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\right].
\end{aligned}
$$

Sendo $a,\, b,\, sen\,\theta > 0$, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
sen\theta &= \sqrt{\frac{4}{a^2b^2}\left[p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\right]} \\
sen\theta &= \frac{2}{ab}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}
\end{aligned}
$$

donde, por (ii), temos que

$$
\begin{aligned}
A_t &= \frac{ab}{2}\,sen\,\theta \\
A_t &= \frac{ab}{2}\left(\frac{2}{ab}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\right) \\
A_t &= \frac{\cancel{ab}}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{ab}}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\right) \\
&\boxed{A_t = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}\text{, que é a fórmula de Herão.}
\end{aligned}
$$

Equipe COM – OBMEP

Voltar para a Sala Principal