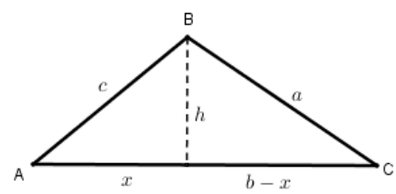
Fórmula de Herão: Dedução 1

Dedução 1

Sejam ABC um triângulo qualquer e A_t a sua área.

Fixemos o vértice de ABC que define o ângulo interno com a maior medida, digamos B, e seja h a medida da altura do triângulo ABC, relativa a esse vértice. Consideremos que essa altura divide o lado oposto ao vértice B em dois segmentos cujas medidas são x e $b-x$, conforme figura ao lado.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2. \qquad (i)$$

Ainda pelo Teorema de Pitágoras, temos que $c^2 = x^2 + h^2$, logo:

$$c^2 - h^2 = x^2 \qquad (ii)$$

e

$$x = \sqrt{c^2 - h^2}, \qquad (iii)$$

já que $x > 0$.

Dessa forma, por (i), (ii) e (iii), podemos afirmar que:

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} + \left(c^2 - h^2\right)$$

$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} + c^2$$

$$2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$c^2 - h^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2. \qquad (iv)$$

Como $A_t = \dfrac{base \cdot altura}{2}$, então $(A_t)^2 = \dfrac{b^2 \cdot h^2}{4}$. Assim, utilizando (iv), segue que:

$$A_t^2 = \frac{b^2\left(c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2\right)}{4} = \frac{b^2\left(c^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{(2b)^2}\right)}{4}$$

$$A_t^2 = \frac{\cancel{b^2}\left(4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2\right)}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{b^2}} = \frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(2bc)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{16}. \qquad (v)$$

Por um momento, façamos $\boxed{z = 2bc}$ e $\boxed{y = b^2 + c^2 - a^2}$. Assim, de (v), segue que:

$$A_t^2 = \frac{z^2 - y^2}{16} = \frac{(z+y)\,(z-y)}{16}$$

e, portanto,

$$A_t^2 = \frac{(\overbrace{2bc}^{z} + \overbrace{b^2 + c^2 - a^2}^{y})\,(\overbrace{2bc}^{z} - (\overbrace{b^2 + c^2 - a^2}^{y}))}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b^2 + 2bc + c^2) - a^2)\,(-(b^2 - 2bc + c^2) + a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b+c)^2 - a^2)\,(-(b-c)^2 + a^2)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{((b+c)^2 - a^2)\,(a^2 - (b-c)^2)}{16}. \qquad (vi)$$

Façamos, agora, $\boxed{s = b + c}$ e $\boxed{k = b - c}$. De (vi), segue que:

$$A_t^2 = \frac{(s^2 - a^2)\,(a^2 - k^2)}{16} = \frac{((s+a)(s-a))\,((a+k)(a-k))}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(s+a)(s-a)(a+k)(a-k)}{16}$$

e, dessa forma,

$$A_t^2 = \frac{(\overbrace{b+c}^{s} + a)(\overbrace{b+c}^{s} - a)\,(a + \overbrace{b-c}^{k})(a - (\overbrace{b-c}^{k}))}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)}{16}$$

$$A_t^2 = \frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}. \qquad (vii)$$

Note agora que, se $\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$, então:

- $\boxed{\frac{b+c-a}{2}} = \frac{b+c-a+(a-a)}{2} = \frac{b+c+a-2a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - \frac{2a}{2} = \boxed{p-a}$
- $\boxed{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{a+b-c+(c-c)}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \boxed{p-c}$
- $\boxed{\frac{a-b+c}{2}} = \frac{a-b+c+(b-b)}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = \frac{a+c+b}{2} - \frac{2b}{2} = \boxed{p-b}$

logo, segue de (vii) que:

$$A_t^2 = p\cdot(p-a)\cdot(p-c)\cdot(p-b) = p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\,.$$

Como A_t é uma área, então $A_t > 0$; com essa observação, obtemos a fórmula de Herão:

$$\boxed{A_t = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}\,.$$

Equipe COM – OBMEP

Voltar para a Sala Principal