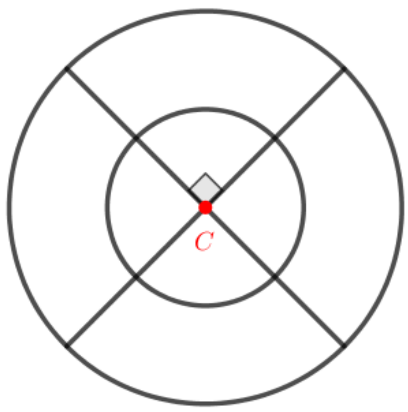
.Problema para ajudar na escola: Duas rosquinhas

Problema

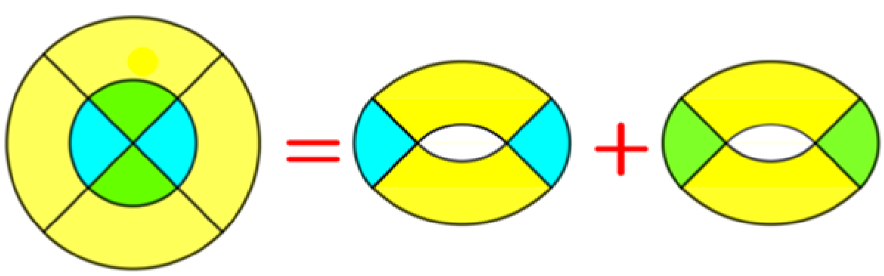
(A partir do 9º ano do E. F.)

A figura a seguir mostra duas circunferências concêntricas, uma de raio $4\,cm$ e outra de raio $8\,cm$, e dois diâmetros perpendiculares entre si.



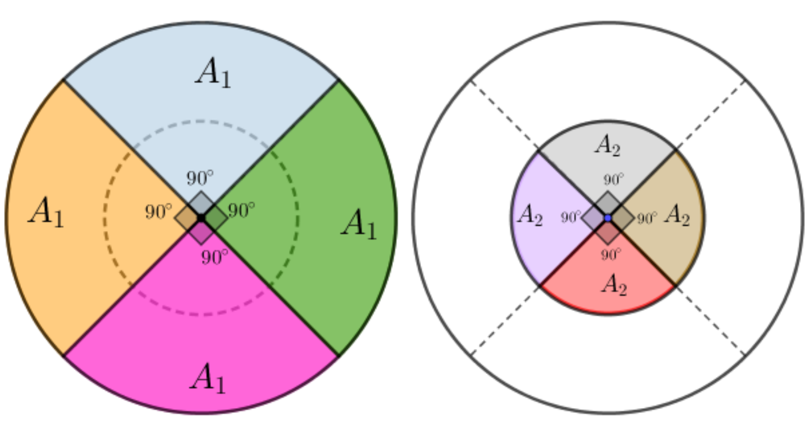
Essa figura foi colorida e recortada adequadamente, de modo a formar as duas "rosquinhas" mostradas na figura abaixo.

Qual a medida da área de cada "rosquinha" que aparece na figura?



Solução 1

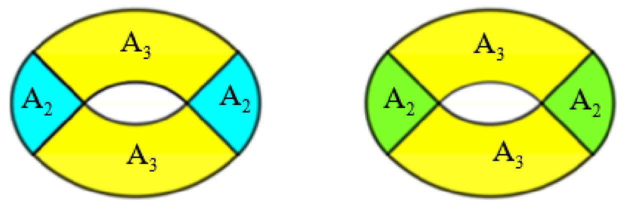
Observe que na figura inicial temos quatro ângulos centrais com a mesma medida, 90°; logo, os quatro arcos definidos em cada circunferência têm consequentemente a mesma medida. Dessa forma, as áreas dos quatro setores circulares definidos pela circunferência externa têm a mesma medida, digamos A_1, assim como os quatro setores circulares definidos pela circunferência interna têm a mesma medida, digamos A_2.



Se você gosta de fazer contas, note que A_1 é a medida de um quarto da circunferência externa e A_2 é a medida de um quarto da circunferência interna. ou seja,

$$\boxed{A_1 = \frac{\pi \times 8^2}{4} = 16\pi\, cm^2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{A_2 = \frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi\, cm^2}.$$

Vamos observar as duas "rosquinhas".

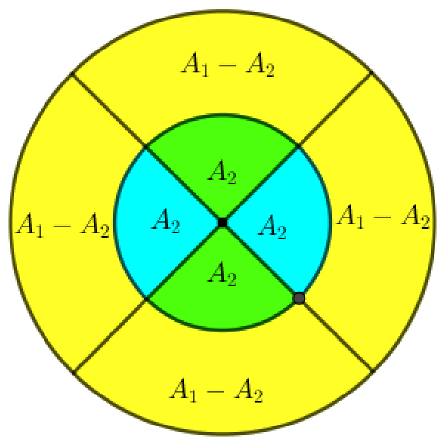


Note que já temos as medidas das áreas das respectivas regiões coloridas de azul e de verde de cada uma delas:

$$2 \times A_2 = 8\pi\, cm^2. \qquad (i)$$

Precisamos agora calcular a medida da área da região amarela e a figura abaixo nos mostra que, em cada "rosquinha", a região amarela corresponde a duas regiões amarelas da figura original antes de ser cortada, ou seja:

$$2 \times A_3 = 2 \times (A_1 - A_2) = 2 \times (16\pi - 4\pi) = 24\pi\, cm^2. \qquad (ii)$$

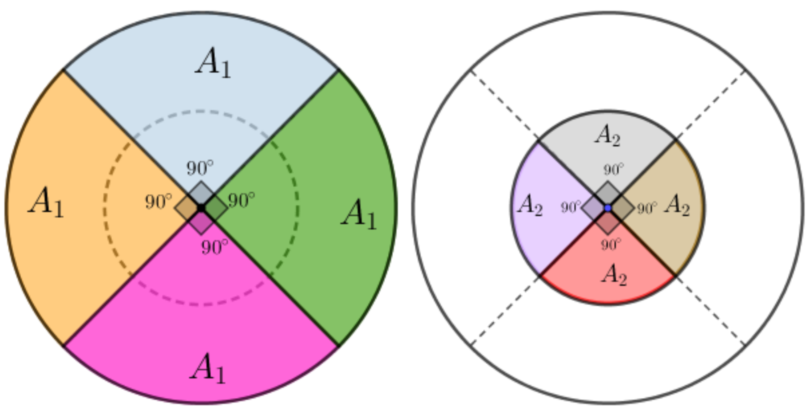


Por (i) e (ii), concluímos que a medida A da área de cada "rosquinha" é $A = 8\pi + 24\pi = \boxed{32\pi\, cm^2}$.

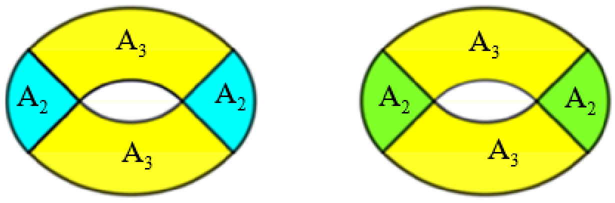
Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Um olhar atento e crítico nos permite calcular a medida da área de cada "rosquinha", sem muitas contas. Mas a observação inicial da primeira solução é útil para nossa análise; portanto, observe que na figura inicial temos quatro ângulos centrais com a mesma medida, 90°. Com isso, as áreas das quatro regiões coloridas do círculo maior têm a mesma medida, digamos A_1, assim como as áreas das quatro regiões coloridas do círculo menor têm a mesma medida, digamos A_2.

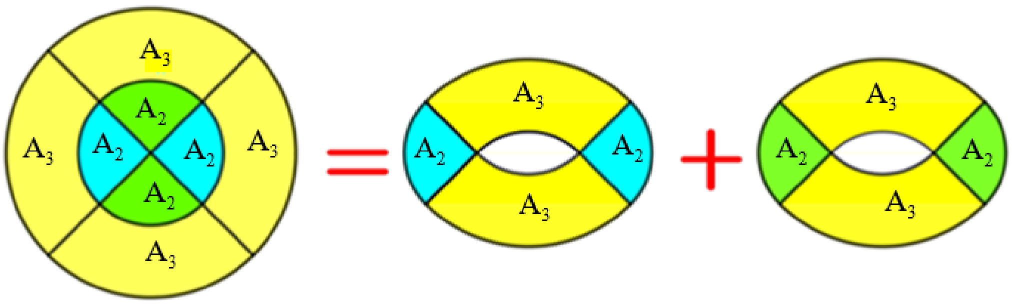


Dessa forma, a área de cada rosquinha é $\boxed{A_3 + A_3 + A_2 + A_2 = 2 \times A_3 + 2 \times A_2}$.



Perceba que, mesmo coloridas com cores diferentes, as medidas das áreas das regiões azuis e verdes são todas iguais; logo, a partir da figura a seguir, concluímos que a área de cada "rosquinha" corresponde à metade da área do círculo maior:

$$2 \times A_3 + 2 \times A_2 = 2 \times (A_1 - A_2) + 2 \times A_2 = 2 \times A_1 \,.$$



Portanto, se a medida da área de cada rosquinha que aparece na figura for denotada por A, segue que:

$$A = \frac{\pi \times 8^2}{2} = \boxed{32\pi \; cm^2} \,.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Na Solução 2, não utilizamos o raio do círculo menor.
Qual foi a utilidade desse dado na segunda solução?