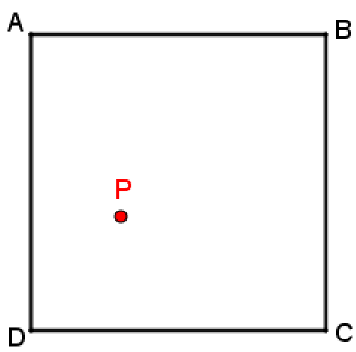
.Problema para ajudar na escola: Diagonal de um quadrado

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Seja P um ponto do interior de um quadrado $ABCD$.



Se as áreas dos triângulos APD e BPC são $8\,cm^2$ e $10\,cm^2$, respectivamente, qual o comprimento em milímetros de cada diagonal do quadrado $ABCD$?

Lembretes

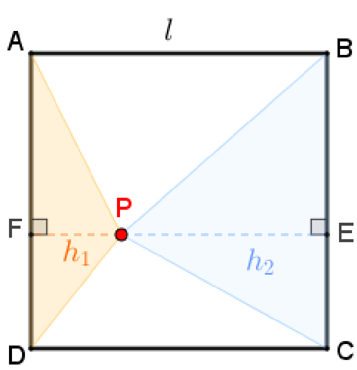
Vamos resolver este problema utilizando apenas resultados bem conhecidos da Geometria:

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Área do triângulo: $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Solução

Para ajudar na visualização da solução, vamos completar a figura do problema, mostrando os triângulos APD e BPC e duas de suas respectivas alturas, cujos comprimentos em centímetros denotaremos por h_1 e h_2. O comprimento em centímetros dos lados do quadrado $ABCD$ será denotado por l.



- Vamos observar as áreas dos triângulos APD e BPC, denotando-as por S_{APD} e S_{BPC}, respectivamente.

Triângulo APD:

$$S_{APD} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$
$$8 = \frac{l \times h_1}{2}$$
$$h_1 = \frac{16}{l}$$

Triângulo BPC:

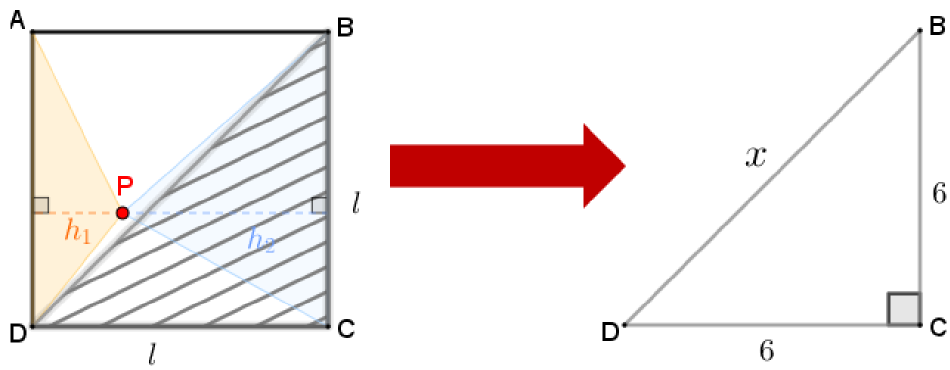
$$S_{BPC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$
$$10 = \frac{l \times h_2}{2}$$
$$h_2 = \frac{20}{l}$$

- Mas perceba que $h_1 + h_2 = l$; assim, segue que:

  $$h_1 + h_2 = l$$
  $$\frac{16}{l} + \frac{20}{l} = l$$
  $$l^2 = 16 + 20$$
  $$l = \pm\sqrt{16+20}$$
  $$l = \pm 6.$$

  Como l é um comprimento, concluímos que $\boxed{l = 6\,cm}$.

- Agora, vamos observar o triângulo retângulo BCD. Como seus catetos são os lados do quadrado, eles têm comprimento $6\,cm$ e sua hipotenusa é uma das diagonais do quadrado $ABCD$. Logo, se denotarmos o comprimento em centímetros do segmento BD por x, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras e obter o comprimento em centímetros de cada diagonal do quadrado $ABCD$.



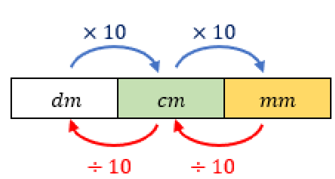
  Vamos aos cálculos:

  $$6^2 + 6^2 = x^2$$
  $$36 + 36 = x^2$$
  $$2 \times 36 = x^2$$
  $$x = \pm\sqrt{2 \times 36}$$
  $$x = \pm 6\sqrt{2}.$$

Como x é um comprimento, $x = 6\sqrt{2}$ e, portanto, temos que a diagonal do quadrado $ABCD$ mede $\boxed{6\sqrt{2}\,cm}$.

- Para finalizarmos a solução do problema, precisamos converter $6\sqrt{2}\,cm$ em mm.

  E, para isso, o esqueminha abaixo pode ajudar!



  - Comprimento da diagonal do quadrado $ABCD$ em mm :

    $$6\sqrt{2} \times 10 \longmapsto \boxed{60\sqrt{2}\,mm \approx 84,85\,mm}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.