.Problema para ajudar na escola: Avaliando uma soma

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**ONEM 2009** – Adaptado) Sabemos que a , b e c são números naturais distintos tais que $\boxed{a \cdot b \cdot c = 72}$.
Qual é o menor valor possível para a soma $\boxed{a+b+c}$?

Lembretes

Sejam $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ números reais positivos.

(1) Chamamos de Média Aritmética dos números $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ ao número assim definido:

$$\boxed{MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}}.$$

(2) Chamamos de Média Geométrica dos números $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ao número assim definido:

$$\boxed{MG = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}}.$$

(3) Propriedade importante: $\boxed{MA \geqslant MG}$, ou seja,

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}}.$$

A igualdade só ocorre para $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

(Para aprender um pouco mais sobre médias, clique **AQUI**)

Solução

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a , b e c são números naturais tais que $\boxed{a \cdot b \cdot c = 72}$, com $a < b < c$.

Pela desigualdade apresentada no Lembrete **(3)** e sabendo que a , b e c são números positivos, temos que:

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$$

e, assim,

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{72}}.$$

Como $\sqrt[3]{72} \approx 4,16$, segue que

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{72} > 4}.$$

e, portanto, $a+b+c > 12.$

Mas observe que a , b e c são números naturais e, assim, $a+b+c$ é também um número natural. Então podemos concluir que $a+b+c \geqslant 13$.

Particularmente, se $a=3,\ b=4$ e $c=6$, então $a+b+c=13$; portanto, o menor valor possível para a soma $boxeda+b+c$ é, de fato, $\boxed{13}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participaram da discussão os Clubes **FAAPERS** e **Os Pitagóricos MA**.