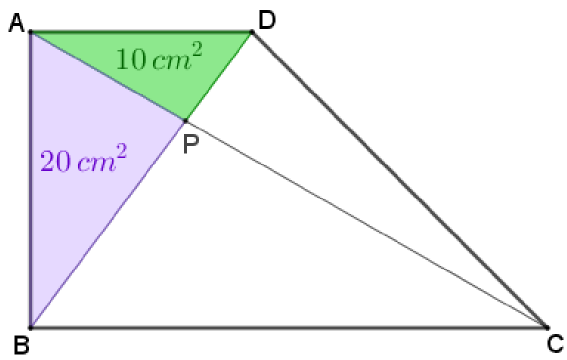
.Problema para ajudar na escola: A área de um trapézio

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do trapézio retângulo $ABCD$ mostrado na figura.
A interseção dessas diagonais é o ponto P e as áreas dos triângulos APD e ABP são $10\,cm^2$ e $20\,cm^2$, respectivamente.



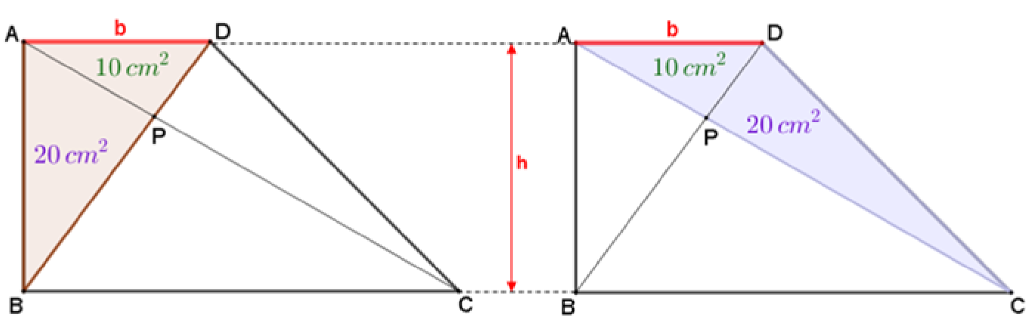
Determinar a área do trapézio $ABCD$.

Lembretes

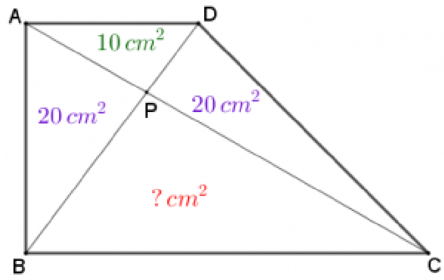
(1) Se duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal, então os pares de ângulos alternos internos que essa transversal define são congruentes. (Precisa relembrar estes conceitos? Dê uma passadinha por **aqui**.)
(2) Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.
(3) Caso de Semelhança A.A. (ângulo – ângulo): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes. (Há uma **Sala de Ajuda** sobre esse tema no Blog!)
(4) A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Solução

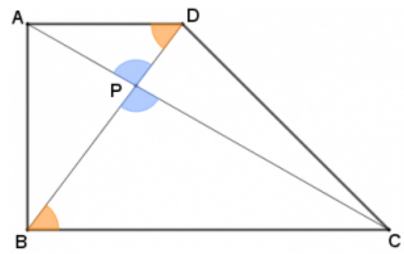
Observe que os triângulos ABD e ACD têm a mesma base, com comprimento b, e a mesma altura, com comprimento h. Assim, esses triângulos têm a mesma área e, consequentemente, a área do triângulo DPC é também $20\,cm^2$.



Dessa forma, só precisamos determinar a área do triângulo BPC para calcular a área do trapézio $ABCD$.



Vamos lá!



- Observe que os ângulos $C\hat{P}B$ e $D\hat{P}A$ são opostos pelo vértice; logo, pelo Lembrete **(2)** , têm a mesma medida. Observe também que os ângulos $C\hat{B}P$ e $B\hat{D}A$ são alternos internos definidos por segmentos paralelos, já que $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são lados paralelos de um trapézio. Assim, pelo Lembrete **(1)**, $C\hat{B}P$ e $B\hat{D}A$ têm a mesma medida.

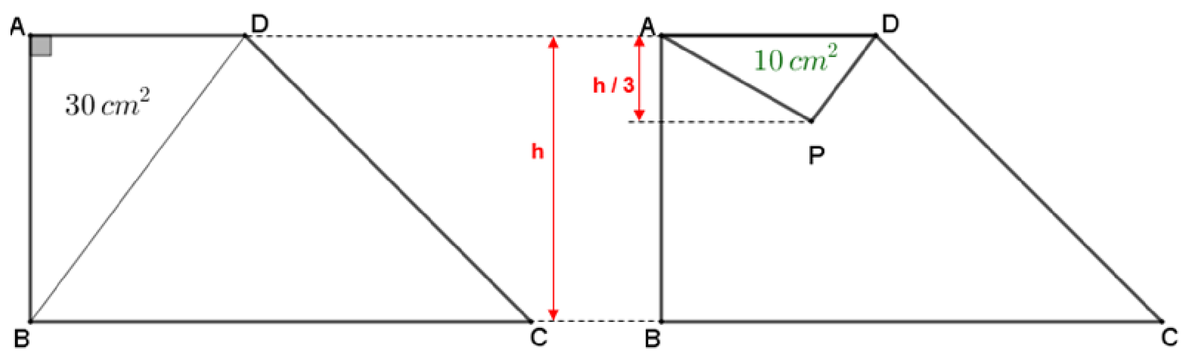
  Dessa forma, pelo Lembrete **(3)**, os triângulos APD e CPB são semelhantes.

Segundo o Lembrete **(4)**,

► a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

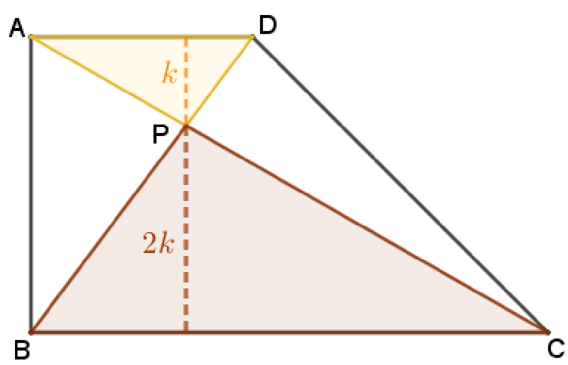
Assim, como conhecemos a área do triângulo APD, vamos determinar a razão de semelhança entre os triângulos APD e BPC. E para isso, vamos utilizar o triângulo ABD como intermediário. Observe!

- Os triângulos ABD e APD têm uma mesma base, $\overline{AD}$, no entanto a área de ABD é o triplo da área de APD. Com isso, concluímos que a altura do triângulo ABD é o triplo da altura do triângulo APD.



Visto que a altura do triângulo ABD com relação ao lado $\overline{AD}$ é definida pelo segmento $\overline{AB}$, concluímos que a soma das alturas dos triângulos BPC e APD é exatamente a altura h do triângulo ABD. Logo,

► a altura do triângulo BPC é o dobro da altura do triângulo APD.



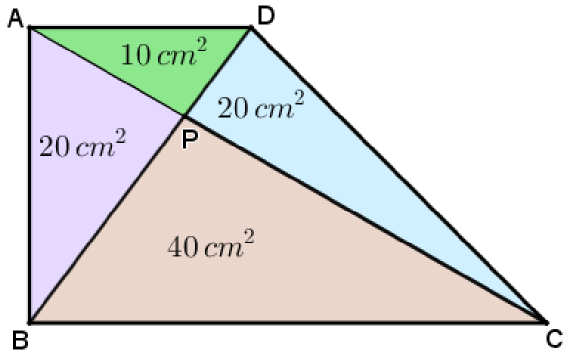
$com\ k + 2k = h$

Finalmente, como:

- os triângulos APD e BPC são semelhantes, com razão de semelhança 2 e
- a área do triângulo APD é $10\,cm^2$,

então, o Lembrete **(4)** nos garante que a área do triângulo BPC é $\boxed{2^2 \times 10 = 40\,cm^2}$.

Portanto, a área do trapézio $ABCD$ é $\boxed{20 + 10 + 20 + 40 = 90\,cm^2}$.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.