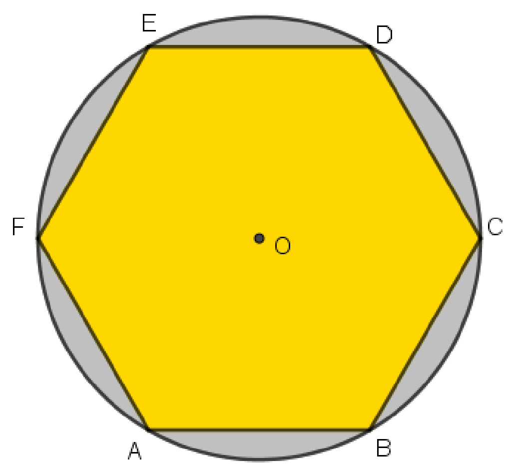
.Problema para ajudar na escola: A área de um quadrilátero

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Na figura, o hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito no círculo de centro O.



Se a distância entre os vértices A e B é $4\,cm$, qual a área do quadrilátero $ABOF$?

Lembretes para a Solução 1

(1) Caso de congruência L.L.L. (lado – lado – lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então estes triângulos são congruentes. (Se você não se lembra dos casos de congruência de triângulos, clique **AQUI**.)

(2) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. (Se precisar, visite **esta página**.)

(3) Todo triângulo isósceles possui os ângulos da base com a mesma medida.

(4) A bissetriz de um triângulo equilátero também é uma mediana e uma altura.

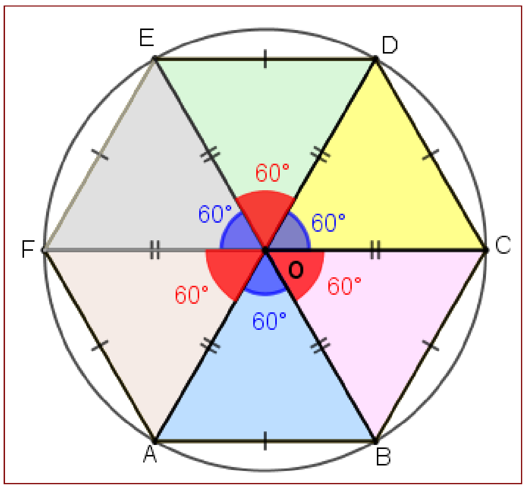
(5) Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Solução 1

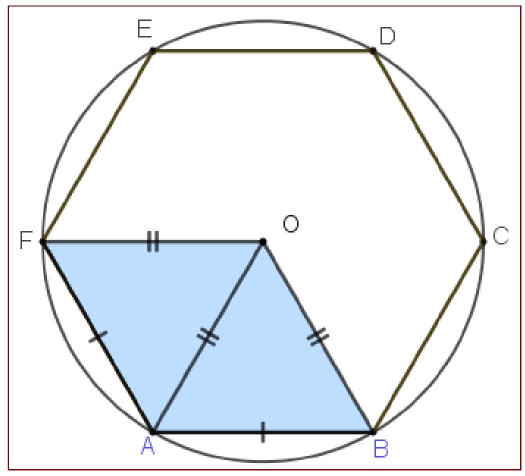
Na figura ao lado, destacamos o quadrilátero $ABOF$ cuja área iremos calcular.
Observe inicialmente que a área desse quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos AOB e FOA; assim, vamos obter as áreas desses triângulos.
Uma primeira análise nos mostra que:

- os segmentos $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ e $\overline{OF}$ são congruentes, pois são raios do círculo no qual o hexágono $ABCDEF$ está inscrito;
- os segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{AF}$ também são congruentes, pois são lados do hexágono regular $ABCDEF$.

Logo, pelo **Lembrete (1)**, os triângulos AOB e FOA são congruentes e, com isso, precisamos encontrar a área de apenas um deles. Por oferecer uma melhor visualização, calcularemos a área do triângulo AOB.



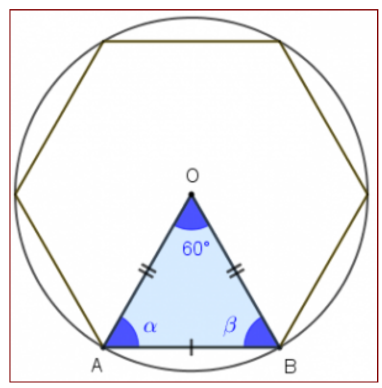
Analisemos agora os seis triângulos destacados na figura à esquerda.
Observe que:



- dois dos lados de cada um deles são raios do círculo no qual o hexágono $ABCDEF$ está inscrito; logo, esses doze segmentos são congruentes;
- os terceiros lados de cada um desses triângulos são lados do hexágono $ABCDEF$, que é regular. Portanto, esses seis segmentos também são congruentes entre si.

Utilizando seguidamente o **Lembrete (1)**, concluímos que os seis triângulos destacados na figura são congruentes e esse fato nos permite concluir que os ângulos internos desses seis triângulos com vértices no ponto O têm a mesma medida, que em graus é igual a $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Então, particularmente a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 60°.

Com essa nova informação, vamos focar nossa atenção no triângulo AOB. Sabemos que o ângulo interno com vértice em O desse triângulo mede 60°; vamos calcular a medida dos outros dois ângulos internos. Para tal, denotaremos essas medidas por α e β, conforme indicado na figura à direita.



Pelo **Lembrete (2)**, segue que:

$$\alpha + \beta + 60^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ$$
$$\alpha + \beta = 120^\circ \qquad (i)$$

e pelo **Lembrete (3)** temos que:

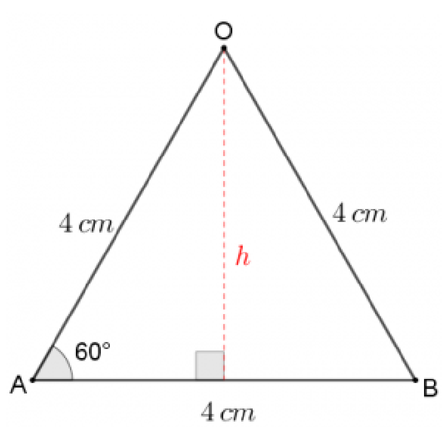
$$\alpha = \beta. \qquad (ii)$$

Então, por (i) e (ii), vem que:

$$\alpha + \beta = 120^\circ$$
$$\alpha + \alpha = 120^\circ$$
$$2\,\alpha = 120^\circ$$
$$\alpha = \beta = 60^\circ$$

e com isso concluímos que o triângulo AOB é equilátero. Dessa forma, como a distância entre os vértices A e B é $4\,cm$, os três lados do triângulo AOB têm comprimento $4\,cm$.

Ainda não temos condições de calcular a área do triângulo AOB. Como a área de um triângulo é $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, precisamos calcular a altura desse triângulo. Para isso, seja h a medida da altura em centímetros do triângulo AOB.



Utilizando o **Lembrete (4)** e o Teorema de Pitágoras, segue que:

$$h^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4^2$$
$$h^2 + 4 = 16$$
$$h^2 = 12$$

$h = \pm\sqrt{3 \times 4}$
$h = 2\sqrt{3}$, já que $h > 0$.
Logo, a área S do triângulo AOB já pode ser calculada:

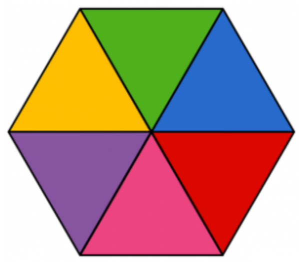
$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\, cm^2$$

e consequentemente temos a área do quadrilátero $ABOF$: $\boxed{2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \approx 13,86\, cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

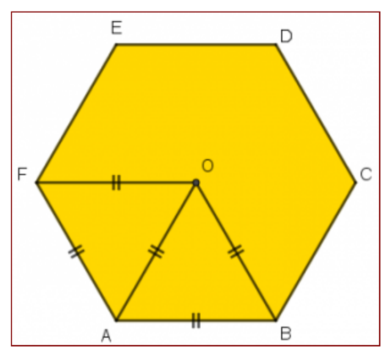
Lembretes para a Solução 2

(1) Todo hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes.



(2) A área A de um triângulo equilátero de lado com comprimento l é $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Solução 2



Na figura ao lado, destacamos o quadrilátero $ABOF$ cuja área iremos calcular. Pelo **Lembrete (1)**, o hexágono regular $ABCDEF$ pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes; assim, a área do quadrilátero $ABOF$ é a soma das áreas dos triângulos equiláteros congruentes AOB e FOA. Com isso, se A_q e A_t são, respectivamente, as áreas do quadrilátero $ABOF$ e de cada triângulo equilátero que compõe o hexágono $ABCDEF$, então:

$A_q = 2A_t. \qquad (i)$

Por outro lado, pelo **Lembrete (2)**, segue que:

$A_t = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}$
$A_t = 4\sqrt{3}. \qquad (ii)$

Assim, por (i) e (ii), segue que:

$A_q = 2 \times 4\sqrt{3}$
$A_q = 8\sqrt{3}.$

Portanto, a área do quadrilátero $ABOF$ é $\boxed{8\sqrt{3} \approx 13,86\, cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube **OCTETO MATEMÁTICO**.