.Problema para ajudar na escola: A corda de uma circunferência

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Fixado um sistema ortogonal de eixos xOy, sabe-se que o ponto $M=(2,1)$ é ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência definida por

$$\boxed{(x-1)^2+y^2=4}.$$

Qual a equação da reta que contém os pontos A e B?

Lembretes

(1) Ao representarmos uma reta r em um plano cartesiano xOy, podemos associar equações a essa reta. Das várias formas de representarmos algebricamente r, duas são mais conhecidas:

Equação geral: equação do tipo $\boxed{ax+by+c=0}$ que é satisfeita por todos os pontos $P=(x,y)$ pertencentes a r.

Equação reduzida: equação associada à reta r e que é obtida da sua equação geral, $ax+by+c=0$, se $b\neq 0$. Relembre:

$$ax+by+c=0 \Leftrightarrow by=-ax-c \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} y=\underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{m}x+\underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{n} \Longrightarrow \boxed{y=mx+n}$$

Particularmente, o coeficiente m é denominado o coeficiente angular e n é o coeficiente linear da reta em questão. Geometricamente:

- A condição $b\neq 0$ significa que a reta r não é vertical, ou seja, não é paralela ao eixo Oy. Assim, retas não verticais têm as duas formas de equação: a geral e a reduzida.
- O coeficiente angular m está associado ao declive da reta, isto é, ao ângulo que a reta define com o eixo horizontal Ox.
- O coeficiente linear n está associado ao ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.

(2) Duas retas não verticais são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for -1.

(3) Também podemos associar equações a uma circunferência c representada em um plano cartesiano xOy. Neste problema utilizaremos a chamada equação reduzida de c:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

que é satisfeita por todos os pontos $P=(x,y)$ pertencentes a c.
Dois elementos importantes da circunferência c aparecem explicitamente nessa equação:

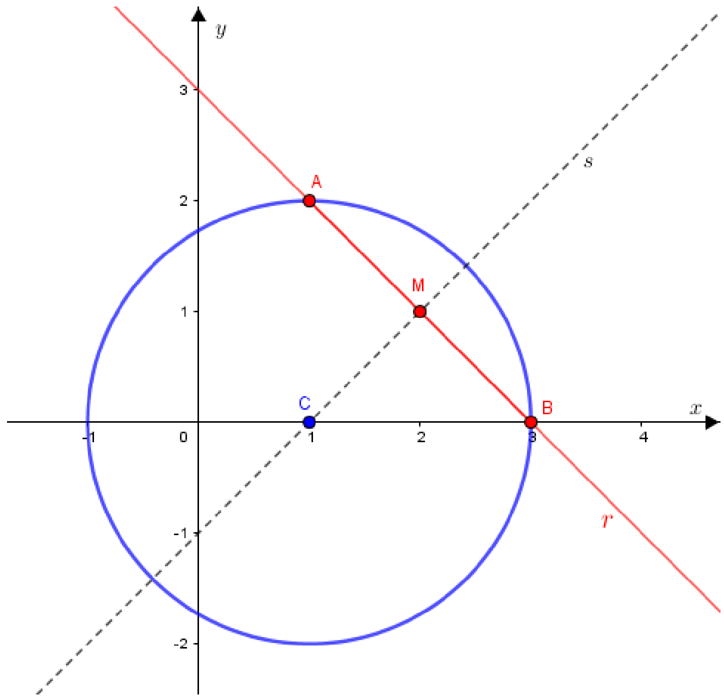
- as coordenadas do centro da circunferência: $C=(a,b)$,
- o comprimento do raio da circunferência: r .

(4) Caso de congruência L.L.L. (lado – lado – lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então estes triângulos são congruentes. (Se você não se lembra dos casos de congruência de triângulos, clique **AQUI**.)

Solução

Observe, inicialmente, que, de acordo com o **Lembrete (3)**, o centro da circunferência dada no problema é o ponto $C=(1,0)$.

Vamos determinar a equação da reta r que contém os pontos A e B, a partir da reta s determinada pelos pontos $C=(1,0)$ e $M=(2,1)$.



Vejamos, então, como obter a equação da reta s:

- Como as primeiras coordenadas de C e de M são distintas ($1 \neq 2$), a reta s não é vertical e, portanto, s tem equação reduzida:

  $$y = m_s x + n_s. \qquad (s)$$

- Por outro lado, C e M são pontos de s; assim, suas coordenadas satisfazem a equação de s. Logo:

  $$0 = m_s \cdot 1 + n_s \qquad \text{e} \qquad 1 = m_s \cdot 2 + n_s$$
  $$0 = m_s + n_s \qquad\qquad 1 = 2m_s + n_s. \qquad (ii)$$
  $$n_s = -m_s \qquad (i)$$

  De (i) e de (ii), segue que:

  $$1 = 2m_s + n_s$$
  $$1 = 2m_s - m_s$$
  $$m_s = 1$$

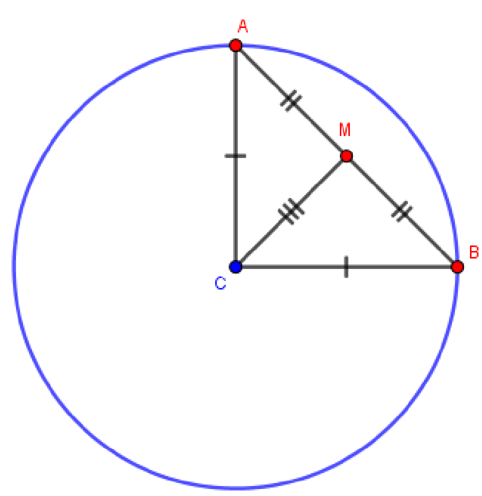
  e, portanto, $n_s = -1$.

Consequentemente, temos a equação reduzida de s: $\boxed{y = x - 1}$.

Você pode estar se perguntando porque vamos utilizar a reta s. A resposta é simples:

> As retas r e s são perpendiculares; logo, pelo **Lembrete (2)**, já temos o coeficiente angular da reta r. E como sabemos que M é ponto de r, conseguimos a equação de r, sem muitos problemas.

Dessa forma, precisamos mostrar que, de fato, r e s são perpendiculares. Para tanto observe a próxima figura, na qual destacamos a circunferência definida no problema, os pontos A, B, C, M e os triângulos AMC e BMC.



Perceba que:

- Os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são raios da circunferência do problema, portanto têm a mesma medida.
- M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, logo os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ têm a mesma medida.
- O segmento $\overline{CM}$ é comum aos dois triângulos.

Desse modo, pelo **Lembrete (4)**, os triângulos AMC e BMC são congruentes e, consequentemente, os ângulos $A\hat{M}C$ e $B\hat{M}C$ têm a mesma medida. Como esses ângulos são suplementares (a soma de suas medidas é 180°), então cada ângulo mede 90° e, com isso, os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{CM}$ (e consequentemente as retas s e s) são perpendiculares.

Pronto, já podemos determinar a equação da reta r:

- Como s não é uma reta horizontal e r é perpendicular a s, então r não é vertical e, portanto, tem equação reduzida:

  $$y = m_r x + n_r. \qquad (r)$$

- Como s e r são perpendiculares, então, pelo **Lembrete (2)**, $m_r \cdot m_s = -1$. Da equação reduzida de s, $\boxed{y = x - 1}$, obtemos que $m_s = 1$, logo $m_r = -1$. Dessa forma, podemos reescrever a equação reduzida de r:

$$y = -x + n_r. \qquad (r)$$

- Sabemos que $M = (2,1)$ é um ponto de r; assim, suas coordenadas satisfazem a equação de r:

$$1 = -2 + n_r$$
$$n_r = 3.$$

Deste modo, a equação reduzida da reta r é $\boxed{y = -x + 3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.