.Desafio: Área no círculo

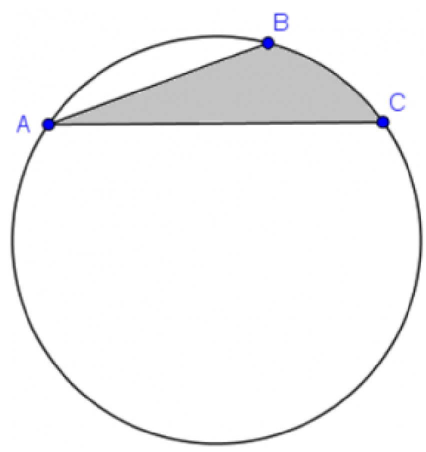
Problema

Em um círculo de área $9\ cm^2$, traçam-se duas cordas AB e AC, tais que:

I) O arco AB mede 70° ($\overset{\frown}{AB}= 70^\circ$);

II) O ângulo BAC mede 20° ($B\widehat{A}C = 20^\circ$).

Calcule a medida da área cinza da figura.



AJUDA

(1) Se duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal, então os pares de ângulos alternos internos que essa transversal define são congruentes. (Precisa relembrar estes conceitos? Dê uma passadinha **nesta Sala**.)

(2) Se você não se lembra ou não sabe o que é um ângulo central, o que é um ângulo inscrito e como obter suas medidas, clique **AQUI**.

(3) Se você não se lembra ou não sabe o que é um setor circular e o que é um segmento circular, clique **AQUI**.

Notações:

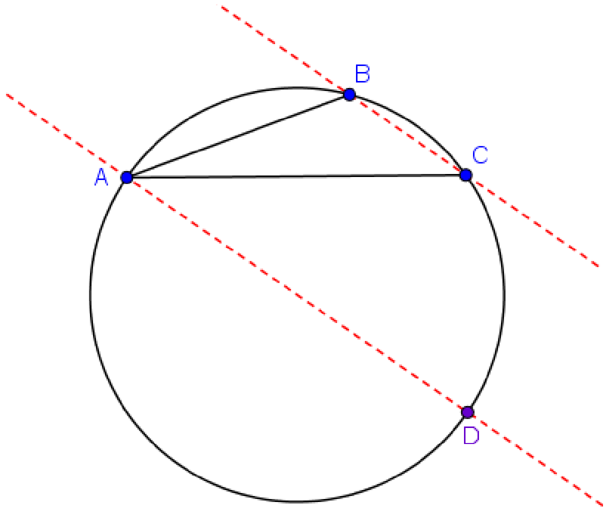
– Denotaremos o comprimento do arco definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overset{\frown}{XY}$.

– Denotaremos a medida do ângulo de vértice V e definido por dois pontos, digamos X e Y, por $X\widehat{V}Y$.

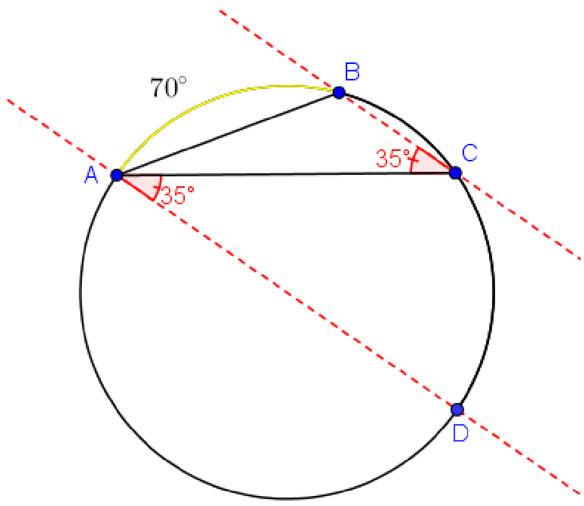
Solução

Inicialmente, perceba que a área desejada é a soma da área do triângulo ABC com a área do segmento circular delimitado pela corda BC e pelo arco BC.

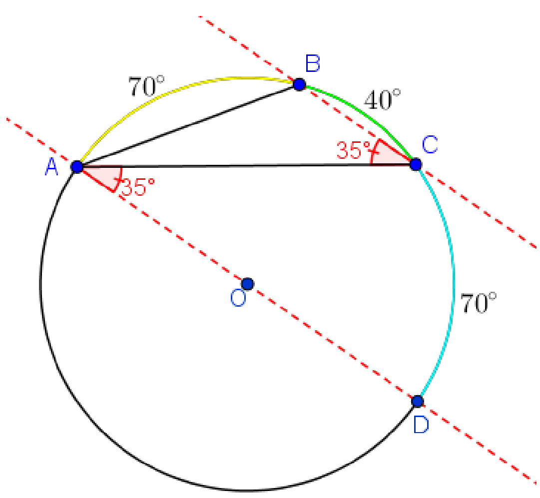
Agora, vamos construir a reta BC e também a reta AD, paralela à reta BC e que passa por A.



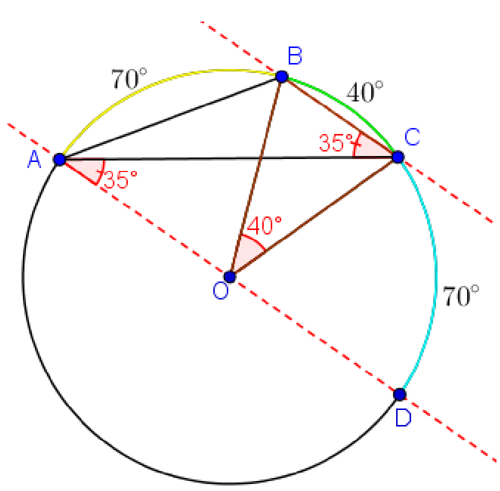
Como $\overset{\frown}{AB} = 70^\circ$, pela definição de ângulo inscrito, concluímos que $B\widehat{C}A = 35^\circ$. Com isso, temos que $C\widehat{A}D = 35^\circ$, já que as retas são paralelas e os ângulos representam um par de ângulos alternos internos.



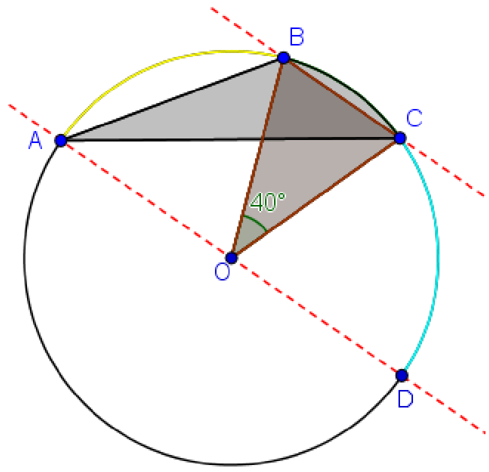
Do exposto acima e utilizando novamente a definição de ângulo inscrito, obtemos que $\overset{\frown}{CD} = 70^\circ$. Do enunciado, temos que $B\hat{A}C = 20^\circ$, logo $\overset{\frown}{BC} = 40^\circ$. Dessa forma, $\overset{\frown}{AD} = 180^\circ$ e, portanto, a reta AD passa pelo centro O do círculo.



Construindo o triângulo OBC e utilizando a definição de ângulo central, temos que $B\hat{O}C = 40^\circ$.



Agora, note que os triângulos ABC e OBC possuem a mesma área, pois ambos têm o segmento BC como base e a distância entre as retas paralelas como altura. Com isso, a área desejada é a soma da área do triângulo OBC com o segmento circular delimitado pelo arco BC e a corda BC, ou seja, a área desejada é a área do setor circular OBC.



Por fim, a área do setor circular é dada por

$$A = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 9 = 1\ cm^2$$

e, portanto, a medida da área cinza da figura apresentada no problema é $\boxed{1\ cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.