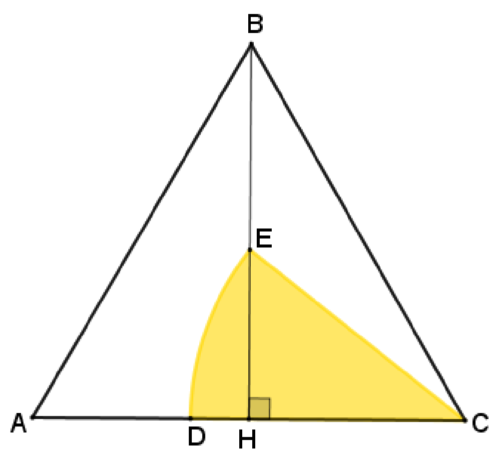
.Problema para ajudar na escola: Um setor circular desafiador!

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

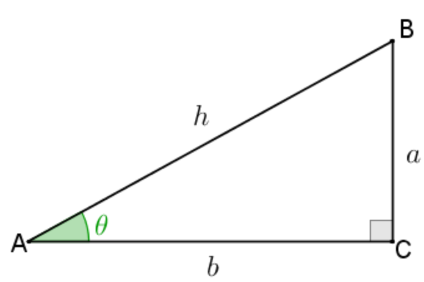
(**ONEM 2010**) Na figura, o segmento $\overline{BH}$ é uma altura do triângulo equilátero ABC, cujos lados têm comprimentos $6\sqrt{3}\,cm$, e D é um ponto do segmento $\overline{AC}$ tal que a distância entre os pontos D e H é $3\left(2-\sqrt{3}\right)\ cm$.
Sabendo que E é um ponto do segmento $\overline{BH}$, determine a medida da área do setor circular ECD.



Ajuda

✏ **Definição:** Seja ACB um triângulo retângulo com catetos e hipotenusa com comprimentos a, b, h, respectivamente. Seja θ a medida em graus de um dos ângulos agudos desse triângulo, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Chamamos de *cosseno de* θ, e denotamos por $cos\ \theta$, a razão entre os comprimentos do cateto adjacente a θ e da hipotenusa: $\boxed{cos\ \theta = \dfrac{b}{h}}$.



✏ No estudo da trigonometria, alguns ângulos são bastante utilizados e devido à frequência com que eles surgem em problemas e à importância que eles têm para a Geometria são denominados **ângulos especiais** ou **ângulos fundamentais**. São eles os ângulos com medidas iguais a: 30°, 45° e 60°.

Os senos, cossenos e tangentes desses ângulos são:

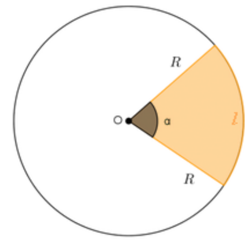
a) $sen\ 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\quad cos\ 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\ 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $sen\ 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ 45^\circ = 1$.

c) $sen\ 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad cos\ 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\quad tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$.

✏ Área de um setor circular de raio R e α graus:

$$\boxed{A_{setor} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360}}.$$



Uma altura de um triângulo equilátero é também mediana e bissetriz.

Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

Solução

Este problema é um desafio não pelo raciocínio que ele exige, mas pela quantidade de informações que ele utiliza! Vamos à solução.

Como o segmento $\overline{BH}$ é uma altura do triângulo equilátero ABC, então $\overline{BH}$ é também uma mediana. Assim:

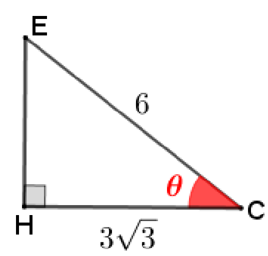
$$HC = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm$$

e, consequentemente, o comprimento r, em centímetros, do raio do setor circular ECD é dado por:

$$r = DC = EC = DH + HC$$
$$r = 3\left(2 - \sqrt{3}\right) + 3\sqrt{3}$$
$$r = 6 - \cancel{3\sqrt{3}} + \cancel{3\sqrt{3}}$$
$$r = 6\ cm.$$

Observemos agora o triângulo retângulo EHC.

Consultando as informações da **AJUDA**, vemos que se θ é a medida do ângulo central do setor circular, então:



$$cos\ \theta = \frac{HC}{EC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, portanto, $\theta = 30^\circ$.

Já temos a medida em graus do setor circular ECD, assim como o seu raio. Logo, utilizando a fórmula da área de um setor circular apresentada na **AJUDA**, temos que:

$$A_{setor} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 30}{360} = 3\pi$$

e com isso podemos concluir que a medida da área do setor circular ECD é $\boxed{3\pi\ cm^2}$, aproximadamente $\boxed{9,42\ cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio
CAPES CNPq SBM

Realização
impa
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL