.Problema para ajudar na escola: Existem primos?

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$ a função definida por $f(n)=n^4-2n^2-24.$
Entre os valores assumidos por f, existe algum número primo?

Lembretes

(i) Diferença de dois quadrados:

$$\boxed{m^2-n^2=(m+n)\cdot(m-n)}, \forall\, m,n\in\mathbb{R}$$

(ii) Quadrado da diferença:

$$\boxed{(m-n)^2=m^2-2\cdot m\cdot n+n^2}, \forall\, m,n\in\mathbb{R}$$

Solução

Seja n um número natural e considere a imagem $f(n)=n^4-2n^2-24.$ Note que:

$$\begin{aligned} f(n)&=n^4-2n^2-24\\ &=n^4-2n^2+1-25\\ &=\left(n^4-2n^2+1\right)-25\\ &=\left(n^2-1\right)^2-5^2\\ &=\left[\left(n^2-1\right)+5\right]\cdot\left[\left(n^2-1\right)-5\right]\\ &=\left(n^2+4\right)\cdot\left(n^2-6\right); \end{aligned}$$

com isso, para que $f(n)$ seja um número primo, devemos ter $n^2+4=\pm1$ ou $n^2-6=\pm1.$
Analisemos, então, os quatro casos.

- Se $n^2+4=1$, teríamos $n^2=-3$, o que não é possível visto que $n^2\geqslant0.$
- Se $n^2+4=-1$, teríamos $n^2=-5$, o que também não é possível já que $n^2\geqslant0.$
- Se $n^2-6=1$, teríamos $n^2=7$, o que não é possível, pois, mesmo tendo $n^2=7>0$, 7 não é um quadrado perfeito.
- Se $n^2-6=-1$, teríamos $n^2=5$, o que não é possível, porque, mesmo tendo $n^2=5>0$, 5 também não é um quadrado perfeito.

Portanto, podemos concluir que **não existem números primos entre os valores assumidos por f**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.