.Problemão: Encontre a Solução

Problema

(Extraído de **Problems and solutions from Mathematical Olympiads**) Encontre todos os inteiros positivos m, n, com n ímpar, tais que $\boxed{\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{12}}$.

Solução 1

Sejam m, n inteiros positivos tais que $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{12}$. Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
&12n+48m=mn\\
&mn-12n=48m\\
&n=\frac{48m}{m-12}\\
&n=\frac{48m-576+576}{m-12}\\
&n=\frac{48(m-12)+576}{m-12}\\
&n=48+\frac{576}{m-12}. \qquad\qquad (i)
\end{aligned}$$

Como n é ímpar, segue de (i) que $\dfrac{576}{m-12}$ é ímpar (Caso contrário, teríamos que n é par, já que a soma de dois pares é um número par.). Fatorando o número 576, obtemos $576=2^6\times 3^2$; com isso, temos que $\dfrac{576}{m-12}$ é igual a 1, 3 ou 9.

Vamos analisar as três alternativas.

- De $\dfrac{576}{m-12}=1$ segue que $m-12=576$, donde $\boxed{m=588}$.

  Assim, por (i), temos que $n=48+\dfrac{576}{588-12}$, ou seja, $\boxed{n=49}$.

- De $\dfrac{576}{m-12}=3$ segue que $3m-36=576$, donde $\boxed{m=204}$.

  Assim, por (i), temos que $n=48+\dfrac{576}{204-12}$, ou seja, $\boxed{n=51}$.

- De $\dfrac{576}{m-12}=9$ segue que $9m-108=576$, donde $\boxed{m=76}$.

  Assim, por (i), temos que $n=48+\dfrac{576}{76-12}$, ou seja, $\boxed{n=57}$.

Portanto, os pares ordenados (m, n) que satisfazem as condições do problema são: $\boxed{(76,57)}$, $\boxed{(204,51)}$ e $\boxed{(588,49)}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Podemos reescrever a equação do problema como:

$$12n + 48m = mn. \qquad (1)$$

Sendo m e n inteiros positivos, concluímos que as parcelas $12n$ e $48m$ são múltiplas de 4 e, desse modo, mn também é múltiplo de 4. Mas, sendo n ímpar e $4 = 2^2$, temos que $mdc(4, n) = 1$; assim, a única maneira do produto mn ser um múltiplo de 4 é m ser múltiplo de 4. Assim, existe um número inteiro positivo t tal que:

$$m = 4t. \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos que:

$$12n + 48 \cdot 4t = 4t \cdot n$$
$$3n + 48t = tn \qquad (3)$$
$$48t = tn - 3n$$
$$48t = n(t-3). \qquad (3.1)$$

Da igualdade (3.1) concluímos que $48t$ é múltiplo de n.

Mas, sendo $48t = 16 \cdot 3t$, n ímpar e $16 = 2^4$, resulta que $mdc(16, n) = 1$ e, portanto, $3t$ é múltiplo de n. Assim, existe um número inteiro positivo x tal que $3t = nx$.

Multiplicando ambos os lados da equação (3) por 3 e substituindo $3t$ por nx, segue que:

$$9n + 48 \cdot 3t = 3tn$$
$$9n + 48 \cdot nx = nx \cdot n$$
$$9 + 48x = nx \qquad (4)$$
$$x(n - 48) = 9. \qquad (4.1)$$

Da igualdade (4.1) resulta que x é um divisor inteiro positivo de 9, ou seja, $x = 1$, $x = 3$ ou $x = 9$.

Vamos analisar separadamente esses três casos; mas, antes disso, observe que, de (4), temos que $\boxed{n = \dfrac{9 + 48x}{x}}$.

- Se $x = 1$, então $n = \dfrac{9 + 48 \cdot 1}{1}$, ou seja, $\boxed{n = 57}$.

  Neste caso, por (1), temos que:

  $$12 \cdot 57 + 48m = 57m$$
  $$9m = 684$$
  $$\boxed{m = 76}.$$

- Se $x = 3$, então $n = \dfrac{9 + 48 \cdot 3}{3}$, ou seja, $\boxed{n = 51}$.

  Neste caso, por (1), temos que:

  $$12 \cdot 51 + 48m = 51m$$
  $$3m = 612$$
  $$\boxed{m = 204}.$$

- Se $x = 9$, então $n = \dfrac{9 + 48 \cdot 9}{9}$, ou seja, $\boxed{n = 49}$.

  Neste caso, por (1), temos que:

  $$12 \cdot 49 + 48m = 49m$$
  $$\boxed{m = 588}.$$

Portanto, os pares ordenados (m, n) que satisfazem as condições do problema são: $\boxed{(76, 57)}$, $\boxed{(204, 51)}$ e $\boxed{(588, 49)}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.