.Problema: Encontre a Progressão Aritmética

Problema

(Extraído de **Fundamentos de Matemática Elementar**, volume 4) Determine uma progressão aritmética de razão 1, sabendo que o número de termos n é divisível por 3, que a soma dos termos é 33 e que o termo de ordem $\dfrac{n}{3}$ é 4.

Lembrete

(1) Considerando uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ de razão r temos que:

(1.1) o termo geral é dado por $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$;

(1.2) a soma dos n primeiros termos é dada por $\boxed{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n}$.

(2) As raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde a, b, c são números reais, com $a \neq 0$, e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solução

Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ uma progressão aritmética que satisfaz as condições do problema.

Pelas hipóteses do problema, $a_{\frac{n}{3}} = 4$; assim, do **Lembrete (1.1)**, segue que:

$$a_{\frac{n}{3}} = 4$$

$$a_1 + \left(\frac{n}{3} - 1\right) \cdot 1 = 4$$

$$a_1 = 5 - \frac{n}{3}. \qquad (i)$$

Como n é divisível por 3 temos que $n = 3k$, para algum número natural k. Assim, $a_1 = 5 - k$ e, portanto,

$$a_n = a_{3k} = a_1 + (3k-1) \cdot r$$

$$a_n = (5-k) + (3k-1) \cdot 1$$

$$a_n = 2k + 4. \qquad (ii)$$

De (i), (ii) e do **Lembrete (1.2)** obtemos que:

$$33 = \frac{(5 - k + 2k + 4)}{2} \cdot (3k)$$

$$66 = (k+9) \cdot (3k)$$

$$k^2 + 9k - 22 = 0.$$

Agora, vamos resolver a equação $k^2 + 9k - 22 = 0$ usando a fórmula do **Lembrete (2)**:

$$k = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-22)}}{2 \cdot 1}$$
$$k = \frac{-9 \pm \sqrt{169}}{2}$$
$$k = \frac{-9 \pm 13}{2}.$$

Obtemos, então, dois possíveis valores para k: $k = -11$ ou $k = 2$. Mas observe que $k = -11$ não satisfaz as condições do problema, pois $n = 3k$ é um número positivo. Assim, $k = 2$ e, com isso, $\boxed{a_1 = 3}$ e $\boxed{n = 6}$.

Portanto, a progressão aritmética em questão é $\boxed{(3, 4, 5, 6, 7, 8)}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.