.Problemão: Data de Aniversário

Problema

(**Prova Final da Olimpíada de Matemática de São Paulo**, 1979 – Oitava Série) Peça a um amigo que multiplique o dia do seu aniversário por 12, o mês do aniversário por 31 e some os dois resultados.

a) Suponha que seu amigo seguiu as instruções e a soma deu 368. Quando é o aniversário dele?
b) Para um outro amigo a soma deu 191. Quando é o aniversário?
c) Demonstre que, dada a soma, a data é determinada de modo único, isto é, dada a soma, nunca haverá dúvida de quando é o aniversário.

Solução

a) Sejam d e m, respectivamente, o dia e o mês do nascimento. Então, $12d + 31m = 368$.
Como 12 e 368 são divisíveis por 4, m tem que ser divisível por 4, já que 31 é primo, além de ser menor que 12. Assim, os únicos valores possíveis para m são 4 ou 8. Vamos analisá-los:

- se $m = 4$, d não é inteiro;
- para $m = 8$, obtemos $d = 10$;

logo, o aniversário do seu primeiro amigo é dia $\boxed{10 \text{ de agosto}}$.

b) Agora, temos $12d + 31m = 191$.
Observe que $m \leq 6$ e $191 - 31m$ deve ser divisível por 12. Testando os valores de m temos:

- para $m = 1$, d não é inteiro;
- para $m = 2$, d não é inteiro;
- para $m = 3$, d não é inteiro;
- para $m = 4$, d não é inteiro;
- para $m = 5$, $d = 3$;
- para $m = 6$, d não é inteiro.

Assim, $m = 5$ e $d = 3$ e, portanto, o aniversário do seu segundo amigo é dia $\boxed{3 \text{ de maio}}$.

c) Para mostrar que, conhecida uma soma, não há dúvidas quanto à data a ela associada, devemos mostrar que é impossível haver um número N que seja associado a duas datas distintas $d; m$ e $d'; m'$. Faremos isso mostrando que, se uma soma N decorre de duas datas $d; m$ e $d'; m'$, onde d e d' são os dias e m e m' os meses do nascimento, necessariamente teremos $d = d'$ e $m = m'$. Vamos lá!
Seja, então, N a soma associada às datas $d; m$ e $d'; m'$; com isso:

$$N = 12d + 31m; \qquad (I)$$
$$N = 12d' + 31m' \qquad (II).$$

Mostremos que $d = d'$ e $m = m'$.

Subtraindo a igualdade (II) da igualdade (I), segue que:

$$0 = 12(d - d') + 31(m - m')$$
$$31(m - m') = 12(d' - d). \qquad (III)$$

Observe que $d' - d$ e $m - m'$ são inteiros; desse modo, de (III), concluímos que $12(d' - d)$ deve ser divisível por 31, que é um número primo. Daí, segue que $d' - d$ é múltiplo de 31; porém, veja que $d' - d$ não é maior que 30. Com isso, $d' - d = 0$, isto é, $\boxed{d = d'}$.

Mas, sendo $d' - d = 0$, de (III) segue que $m - m' = 0$, o que implica $\boxed{m = m'}$.

Portanto, nunca haverá dúvida de quando é o aniversário.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio
CAPES CNPq SBM

Realização
impa
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL