.Problema para ajudar na escola: Somas de elementos de um conjunto

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**IMTS** – 1992) Um conjunto A é formado por cinco números naturais. Somando os elementos de A dois a dois obtemos:

- $1967, 1972, 1973, 1974, 1975, 1980, 1983, 1984, 1989$ e $1991.$

Quais são os elementos do conjunto A?

Solução

Suponhamos que o conjunto em questão seja $A=\{n_1\ ,\ n_2\ ,\ n_3\ ,\ n_4\ ,\ n_5\}$.
Como o conjunto A tem cinco elementos, então os números inteiros n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 são distintos dois a dois; assim, suponhamos, sem perda de generalidade, que $n_1<n_2<n_3<n_4<n_5$.
Observe que as somas dos elementos de A aparecem em ordem crescente:

$$1967<1972<1973<1974<1975<1980<1983<1984<1989<1991 \quad ,$$

logo, 1967 é a soma dos dois menores elementos de A e 1991 é a soma dos dois maiores elementos de A. Com isso, obtemos duas relações importantes para a solução do problema:

$$n_1+n_2=1967\ ; \qquad (i)$$
$$n_4+n_5=1991\ . \qquad (ii)$$

Observe, agora, que

$$\boxed{\begin{aligned}&(n_1+n_2)+(n_1+n_3)+(n_1+n_4)+(n_1+n_5)+\\&+(n_2+n_3)+(n_2+n_4)+(n_2+n_5)+\\&+(n_3+n_4)+(n_3+n_5)+\\&+(n_4+n_5)=\\&=4\,(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)\end{aligned}}$$

é a soma de todas as somas de elementos de A dois a dois; portanto, como

$$1967+1972+1973+1974+1975+1980+1983+1984+1989+1991=19788 \quad ,$$

segue das hipóteses do problema que

$$4\,(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)=19788\ ,$$

ou seja,

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=4947\ . \qquad (iii)$$

Assim, de (i), (ii) e (iii), temos que:

$$(n_1+n_2)+n_3+(n_4+n_5)=4947$$
$$1967+n_3+1991=4947$$
$$\boxed{n_3=989}\ .$$

Por outro lado, observe que $n_1<n_2$; assim, segue que $n_1+n_3<n_2+n_3$ e, como 1972 é a segunda menor soma de elementos de A, obtemos mais uma relação entre os elementos de A :

$$n_1 + n_3 = 1972\,. \qquad (iv)$$

De forma análoga, note que 1989 é a segunda maior soma de elementos de A e de $n_4 < n_5$ segue que $n_3 + n_4 < n_3 + n_5$, logo:

$$n_3 + n_5 = 1989\,. \qquad (v)$$

Substituindo $n_3 = 989$ em (iv), segue que:

$$n_1 + n_3 = 1972$$
$$n_1 + 989 = 1972$$
$$\boxed{n_1 = 983}\,.$$

E substituindo $n_3 = 989$ em (v), temos que:

$$n_3 + n_5 = 1989$$
$$989 + n_5 = 1989$$
$$\boxed{n_5 = 1000}\,.$$

Finalmente, substituindo $n_1 = 983$ em (i), segue que:

$$n_1 + n_2 = 1967$$
$$983 + n_2 = 1967$$
$$\boxed{n_2 = 984}$$

e substituindo $n_5 = 1000$ em (ii), segue que:

$$n_4 + n_5 = 1991$$
$$n_4 + 1000 = 1991$$
$$\boxed{n_4 = 991}\,.$$

Portanto, o conjunto A fica assim definido: $\boxed{A = \{983, 984, 989, 991, 1000\}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.