

## .Problema para ajudar na escola: Somas de elementos de um conjunto



### Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(IMTS – 1992) Um conjunto  $A$  é formado por cinco números naturais. Somando os elementos de  $A$  dois a dois obtemos:

- 1967, 1972, 1973, 1974, 1975, 1980, 1983, 1984, 1989 e 1991.

Quais são os elementos do conjunto  $A$ ?

### Solução

Suponhamos que o conjunto em questão seja  $A = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ .

Como o conjunto  $A$  tem cinco elementos, então os números inteiros  $n_1, n_2, n_3, n_4$  e  $n_5$  são distintos dois a dois; assim, suponhamos, sem perda de generalidade, que  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ .

Observe que as somas dos elementos de  $A$  aparecem em ordem crescente:

$$1967 < 1972 < 1973 < 1974 < 1975 < 1980 < 1983 < 1984 < 1989 < 1991,$$

logo, 1967 é a soma dos dois menores elementos de  $A$  e 1991 é a soma dos dois maiores elementos de  $A$ . Com isso, obtemos duas relações importantes para a solução do problema:

$$n_1 + n_2 = 1967; \quad (i)$$

$$n_4 + n_5 = 1991. \quad (ii)$$

Observe, agora, que

$$\begin{aligned} & (n_1 + n_2) + (n_1 + n_3) + (n_1 + n_4) + (n_1 + n_5) + \\ & + (n_2 + n_3) + (n_2 + n_4) + (n_2 + n_5) + \\ & + (n_3 + n_4) + (n_3 + n_5) + \\ & + (n_4 + n_5) = \\ & = 4(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5) \end{aligned}$$

é a soma de todas as somas de elementos de  $A$  dois a dois; portanto, como

$$1967 + 1972 + 1973 + 1974 + 1975 + 1980 + 1983 + 1984 + 1989 + 1991 = 19788,$$

segue das hipóteses do problema que

$$4(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5) = 19788,$$

ou seja,

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 4947. \quad (iii)$$

Assim, de (i), (ii) e (iii), temos que:

$$(n_1 + n_2) + n_3 + (n_4 + n_5) = 4947$$

$$1967 + n_3 + 1991 = 4947$$

$$n_3 = 989.$$

Por outro lado, observe que  $n_1 < n_2$ ; assim, segue que  $n_1 + n_3 < n_2 + n_3$  e, como 1972 é a segunda menor soma de elementos de  $A$ , obtemos mais uma relação entre os elementos de  $A$ :

$$n_1 + n_3 = 1972 . \quad (iv)$$

De forma análoga, note que 1989 é a segunda maior soma de elementos de  $A$  e de  $n_4 < n_5$  segue que  $n_3 + n_4 < n_3 + n_5$ , logo:

$$n_3 + n_5 = 1989 . \quad (v)$$

Substituindo  $n_3 = 989$  em  $(iv)$ , segue que:

$$n_1 + n_3 = 1972$$

$$n_1 + 989 = 1972$$

$$\boxed{n_1 = 983} .$$

E substituindo  $n_3 = 989$  em  $(v)$ , temos que:

$$n_3 + n_5 = 1989$$

$$989 + n_5 = 1989$$

$$\boxed{n_5 = 1000} .$$

Finalmente, substituindo  $n_1 = 983$  em  $(i)$ , segue que:

$$n_1 + n_2 = 1967$$

$$983 + n_2 = 1967$$

$$\boxed{n_2 = 984}$$

e substituindo  $n_5 = 1000$  em  $(ii)$ , segue que:

$$n_4 + n_5 = 1991$$

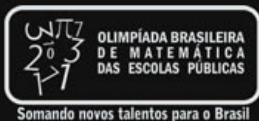
$$n_4 + 1000 = 1991$$

$$\boxed{n_4 = 991} .$$

Portanto, o conjunto  $A$  fica assim definido:  $\boxed{A = \{983, 984, 989, 991, 1000\}}$  .

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

