



.Problema para ajudar na escola: Análise de vendas de um produto



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(XXXV Olimpíada Matemática Espanhola – Adaptado) Uma empresa produz semanalmente 300 unidades de um determinado produto, quantidade essa que é vendida totalmente ao preço de 600 reais cada unidade.

Ao longo de um período de tempo observou-se que, se o preço das unidades variava, as vendas também variavam de acordo com a seguinte relação:

- a cada 7 reais de aumento ou de desconto no preço de cada unidade, a venda diminuía ou aumentava em 3 unidades, respectivamente.

A partir dessas observações, a que preço a receita seria máxima?



Lembretes

(1) O gráfico de uma função quadrática $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox , eixo de simetria paralelo ao eixo Oy , sendo sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

(2) Se $\Delta = b^2 - 4ac$, as coordenadas do vértice da parábola do gráfico de h são dadas por:

$$(x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right),$$

sendo que $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

- ✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h , se a concavidade estiver voltada para cima;
- ✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h , se a concavidade estiver voltada para baixo.

Particularmente, se $\Delta > 0$, x_v é a média entre as duas raízes de h : $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Solução

Seja x uma possível variação em reais do preço do produto em questão. (Perceba que x pode ser um número real positivo, negativo ou zero, conforme o preço inicial aumente, diminua ou permaneça o mesmo, respectivamente.)

Então,

- o novo preço da unidade do produto será $600 + x$ reais. (i)

De acordo com a regra de variação dada no problema,

- a quantidade de produtos vendidos com o novo preço será $300 - \frac{3}{7}x$. (ii)

(Não estranhe o negativo que apareceu nessa última expressão. Lembre-se de que quando o preço aumenta, as vendas diminuem; e quando o preço diminui, as vendas aumentam.)

Assim, por (i) e (ii), a receita resultante da venda do produto a um preço unitário de $(600 + x)$ reais será

$$\boxed{(600 + x) \times \left(300 - \frac{3}{7}x\right)}.$$

Para resolver o problema, precisamos calcular um valor para x que acarretará a receita máxima. Para isso, observe que a receita é função da variação x , em reais, do preço do produto. Logo, podemos explicitar essa relação da receita com a variação de preço x definindo a seguinte função:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (600 + x) \times \left(300 - \frac{3}{7}x\right).$$

Desenvolvendo a expressão que define $f(x)$ obtemos:

$$f(x) = (600 + x) \times \left(300 - \frac{3}{7}x\right)$$

$$f(x) = 180000 - \frac{1800}{7}x + 300x - \frac{3}{7}x^2$$

$$f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{300}{7}x + 180000,$$

e assim temos que

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{300}{7}x + 180000.$$

Note que f é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo. Com isso, se as coordenadas do vértice dessa parábola forem (x_v, y_v) , então y_v será a receita máxima e x_v será a variação do preço de venda que produz a receita máxima. Vamos, portanto, calcular x_v :

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-\frac{300}{7}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}$$

$$x_v = \frac{100}{2}$$

$$\boxed{x_v = 50}.$$

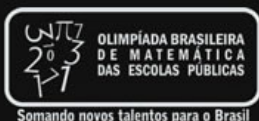
Poderíamos até calcular a receita máxima calculando y_v , ou mesmo a imagem $f(x_v)$, mas não é isso que o problema está pedindo. O que precisamos calcular é o preço unitário de venda do produto que provocaria essa receita máxima e para isso basta substituir $x = 50$ na igualdade (i): $600 + x_v = 600 + 50 = 650$.

Portanto, dentro dos parâmetros do problema, o preço individual do produto que resulta na receita máxima é

$$\boxed{R\$ 650,00}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

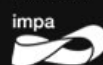
Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

