# .Problema para ajudar na escola: Análise de vendas de um produto

## Problema

**(A partir da 1ª série do E. M.)**

(**XXXV Olimpiada Matemática Española** – Adaptado) Uma empresa produz semanalmente 300 unidades de um determinado produto, quantidade essa que é vendida totalmente ao preço de 600 reais cada unidade.
Ao longo de um período de tempo observou-se que, se o preço das unidades variava, as vendas também variavam de acordo com a seguinte relação:

- a cada 7 reais de aumento ou de desconto no preço de cada unidade, a venda diminuía ou aumentava em 3 unidades, respectivamente.

**A partir dessas observações, a que preço a receita seria máxima?**

**Lembretes**

$(1)$ O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo $Ox$, eixo de simetria paralelo ao eixo $Oy$, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

$(2)$ Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola do gráfico de $h$ são dadas por:

$$(x_v, y_v)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right),$$

sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função $h$, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função $h$, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Particularmente, se $\Delta>0$, $x_v$ é a média entre as duas raízes de $h$: $x_v=\dfrac{r_1+r_2}{2}$.

## Solução

Seja $x$ uma possível variação em reais do preço do produto em questão. (Perceba que $x$ pode ser um número real positivo, negativo ou zero, conforme o preço inicial aumente, diminua ou permaneça o mesmo, respectivamente.)
Então,

- o novo preço da unidade do produto será $\boxed{600+x}$ reais. $\quad(i)$

De acordo com a regra de variação dada no problema,

- a quantidade de produtos vendidos com o novo preço será $\boxed{300-\dfrac{3}{7}x}$. $\quad(ii)$

  (Não estranhe o negativo que apareceu nessa última expressão. Lembre-se de que quando o preço aumenta, as vendas diminuem; e quando o preço diminui, as vendas aumentam.)

Assim, por $(i)$ e $(ii)$, a receita resultante da venda do produto a um preço unitário de $(600+x)$ reais será

$$\boxed{(600+x)\times\left(300-\frac{3}{7}x\right)}.$$

Para resolver o problema, precisamos calcular um valor para $x$ que acarretará a receita máxima. Para isso, observe que a receita é função da variação $x$, em reais, do preço do produto. Logo, podemos explicitar essa relação da receita com a variação de preço $x$ definindo a seguinte função:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=(600+x)\times\left(300-\frac{3}{7}x\right).$$

Desenvolvendo a expressão que define $f(x)$ obtemos:

$$f(x)=(600+x)\times\left(300-\frac{3}{7}x\right)$$
$$f(x)=180000-\frac{1800}{7}x+300x-\frac{3}{7}x^2$$
$$f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{300}{7}x+180000,$$

e assim temos que

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{300}{7}x+180000.$$

Note que $f$ é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo. Com isso, se as coordenadas do vértice dessa parábola forem $(x_v,y_v)$, então $y_v$ será a receita máxima e $x_v$ será a variação do preço de venda que produz a receita máxima. Vamos, portanto, calcular $x_v$:

$$x_v=\frac{-b}{2a}$$
$$x_v=\frac{-\frac{300}{7}}{2\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)}$$
$$x_v=\frac{100}{2}$$
$$\boxed{x_v=50}.$$

Poderíamos até calcular a receita máxima calculando $y_v$, ou mesmo a imagem $f(x_v)$, mas não é isso que o problema está pedindo. O que precisamos calcular é o preço unitário de venda do produto que provocaria essa receita máxima e para isso basta substituir $x=50$ na igualdade $(i)$: $600+x_v=600+50=650.$

Portanto, dentro dos parâmetros do problema, o preço individual do produto que resulta na receita máxima é $\boxed{R\$\ 650,00}$.

---

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.