

.Problemão: Ali Babão e a décima primeira de suas 40 equações



Problema

Determine todas as soluções reais da equação $(x^2 + x + 4)^2 + 8x^3 + 8x^2 + 32x + 15x^2 = 0$.



Lembretes

(1) Fatoração do Trinômio Quadrado

Perfeito:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

(2) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 = b^2$, então $a = b$ ou $a = -b$.

Solução

Vamos reescrever a equação em questão colocando o fator $8x$ em evidência e substituindo $15x^2$ por $16x^2 - x^2$.

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 4)^2 + 8x^3 + 8x^2 + 32x + 15x^2 &= 0 \\(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 - x^2 &= 0 \\(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 &= x^2. \quad (i)\end{aligned}$$

Repare que há um Trinômio Quadrado Perfeito do lado esquerdo da última igualdade; assim, podemos utilizar o

Lembrete 1 e obter que:

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 &= (x^2 + x + 4)^2 + 2 \cdot (x^2 + x + 4) \cdot (4x) + (4x)^2 \\&= (x^2 + x + 4 + 4x)^2. \quad (ii)\end{aligned}$$

De (i) e (ii), temos que:

$$(x^2 + x + 4 + 4x)^2 = x^2.$$

A partir dessa última igualdade, pelo **Lembrete 2**, temos duas possibilidades:

$$x^2 + x + 4 + 4x = x \quad \text{ou} \quad x^2 + x + 4 + 4x = -x.$$

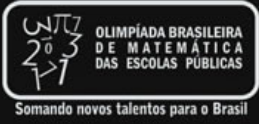
Vamos analisar cada uma delas.

- De $x^2 + x + 4 + 4x = x$, segue que $x^2 + 4x + 4 = 0$ e esta é uma equação do segundo grau com uma única solução: $x = 2$.
- De $x^2 + x + 4 + 4x = -x$, segue que $x^2 + 6x + 4 = 0$ e esta é também uma equação do segundo grau, mas com duas soluções: $x = -3 + \sqrt{5}$ ou $x = -3 - \sqrt{5}$.

Portanto, a equação $(x^2 + x + 4)^2 + 8x^3 + 8x^2 + 32x + 15x^2 = 0$ tem três soluções:

$$x_1 = 2 ; \quad x_2 = -3 + \sqrt{5} ; \quad x_3 = -3 - \sqrt{5}.$$

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

