.Problemão: Ali Babão e a décima primeira de suas 40 equações

Problema

Determine todas as soluções reais da equação $\boxed{(x^2+x+4)^2+8x^3+8x^2+32x+15x^2=0}$.

Lembretes

(1) Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito:
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$

(2) Se $a,b\in\mathbb{R}$ e $a^2=b^2$, então $a=b$ ou $a=-b.$

Solução

Vamos reescrever a equação em questão colocando o fator $8x$ em evidência e substituindo $15x^2$ por $16x^2-x^2$. Com isso, temos que:

$$(x^2+x+4)^2+8x^3+8x^2+32x+15x^2=0$$
$$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+16x^2-x^2=0$$
$$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+16x^2=x^2. \qquad (i)$$

Repare que há um Trinômio Quadrado Perfeito do lado esquerdo da última igualdade; assim, podemos utilizar o **Lembrete 1** e obter que:

$$\begin{aligned}(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+16x^2 &= (x^2+x+4)^2+2\cdot(x^2+x+4)\cdot(4x)+(4x)^2\\ &= (x^2+x+4+4x)^2. \qquad (ii)\end{aligned}$$

De (i) e (ii), temos que:

$$(x^2+x+4+4x)^2=x^2.$$

A partir dessa última igualdade, pelo **Lembrete 2**, temos duas possibilidades:

$$x^2+x+4+4x=x \quad \text{ou} \quad x^2+x+4+4x=-x.$$

Vamos analisar cada uma delas.

- De $x^2+x+4+4x=x$, segue que $x^2+4x+4=0$ e esta é uma equação do segundo grau com uma única solução: $\boxed{x=2}$.
- De $x^2+x+4+4x=-x$, segue que $x^2+6x+4=0$ e esta é também uma equação do segundo grau, mas com duas soluções: $\boxed{x=-3+\sqrt{5}}$ ou $\boxed{x=-3-\sqrt{5}}$.

Portanto, a equação $(x^2+x+4)^2+8x^3+8x^2+32x+15x^2=0$ tem três soluções:

$$\boxed{x_1=2}\ ;\ \boxed{x_2=-3+\sqrt{5}}\ ;\ \boxed{x_3=-3-\sqrt{5}}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.