

SISTEMAS ARTICULADOS PLANOS

Um sistema articulado plano (SAP) rígido é definido como sendo um sistema de barras rígidas coplanares ligadas entre si por extremidades rotuladas e com o exterior de modo a formar um sistema estável. Na prática, este tipo de estrutura é usualmente chamada de **Treliça**. Na análise destas estruturas adoptam-se, em geral, as seguintes hipóteses simplificadoras:

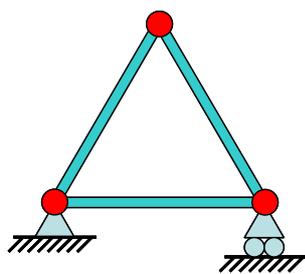
- As articulações das extremidades das barras não têm atrito;
- As cargas da estrutura são caracterizadas por forças aplicadas apenas nos nós (de um modo geral o peso próprio destas estruturas é consideravelmente inferior às cargas a que estão sujeitas pelo que é desprezado)

A estabilidade dum SAP garante que ele não terá qualquer movimento livre segundo qualquer direcção. Para tal o sistema de barras que constitui o SAP é, em geral, formado por associações de triângulos contíguos dado esta figura geométrica ser invariavelmente estável e rígida.

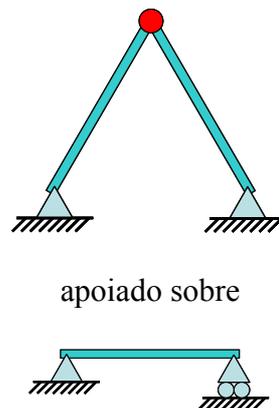
Porque é o triângulo estável?

Através de princípios geométricos (lei dos senos) é possível verificar que o triângulo é a única forma poliédrica que não pode alterar a sua forma sem igualmente alterar o comprimento dos seus lados. Portanto, um SAP rígido formado por um triângulo não sofrerá qualquer deslocamento por acção do seu peso ou por acção de outras forças exteriores ao contrário do que acontece com outras formas geométricas.

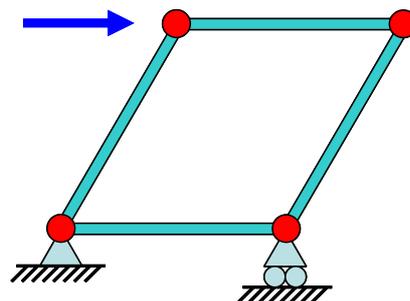
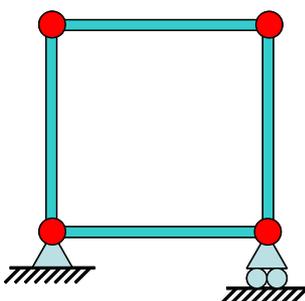
Configuração estável



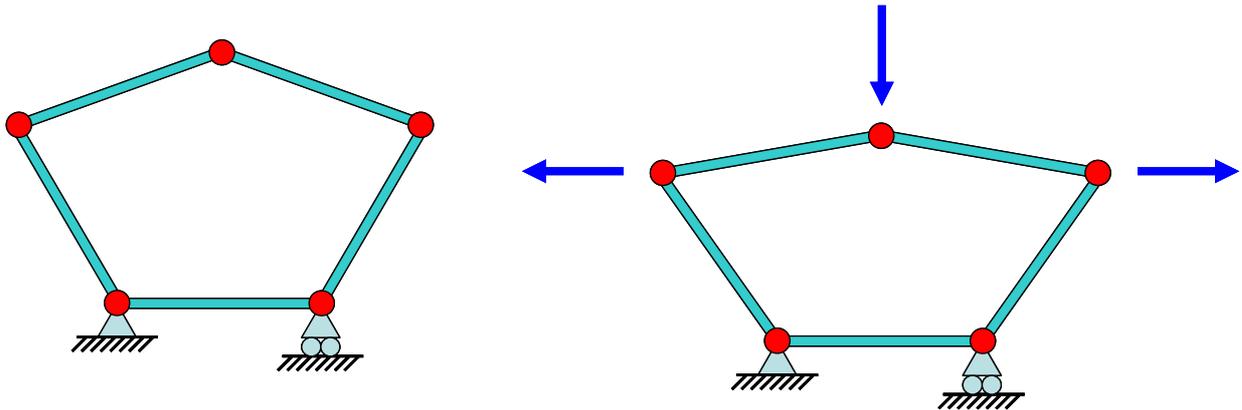
Nota: esta estrutura de configuração estável pode ser desmontada em



Configuração instável

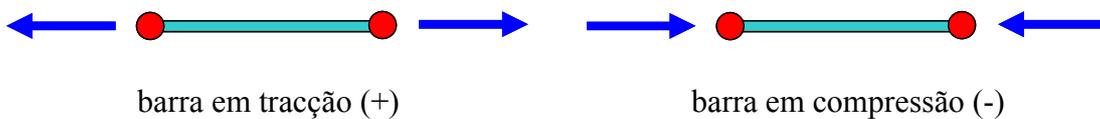


Configuração instável

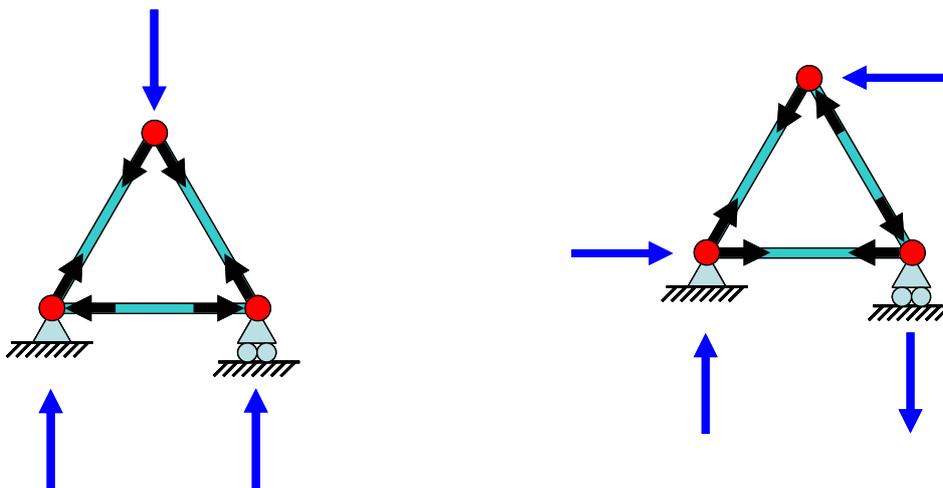


Observando-se as barras que formam um SAP rígido, verifica-se que por terem as suas extremidades articuladas e apenas serem carregadas nos seus nós obedecem à definição de **biela**. Como tal, as barras dum SAP apenas terão esforços segundo o seu eixo e com dois sentidos possíveis. Caso os esforços sejam orientados para o exterior da barra diz-se que esta está em **tracção** e caso sejam orientados para o interior da barra diz-se que esta está em **compressão**.

Nota: Em termos de convenção de sinais, é usual admitir que uma barra traccionada está sujeita a um esforço positivo enquanto que uma barra comprimida está sujeita a um esforço negativo. Esta convenção não deve, no entanto, interferir com a convenção de sinais arbitrada para a definição das equações de equilíbrio que permitem resolver a estrutura.

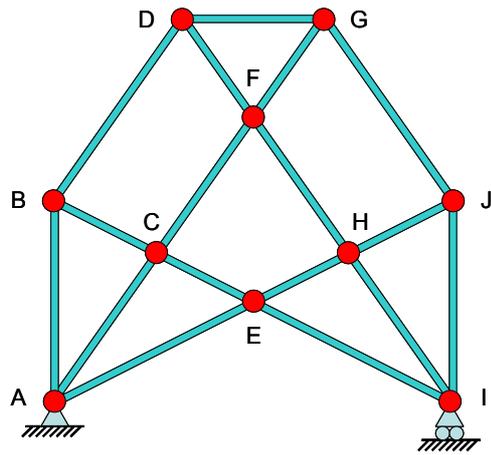


Quando uma força é exercida pontualmente sobre um nó dum elemento triangular ela distribui-se pelas barras que formam os lados do triângulo até se atingir um equilíbrio em cada nó entre as forças de cada barra que convergem nesse nó. Devido ao facto das diversas barras serem bielas, o seu equilíbrio corresponde a terem esforços apenas segundo o seu eixo não sendo necessário qualquer elemento adicional para garantir a sua estabilidade (o que explica porque é que a maioria dos telhados de edifícios são triangulares).



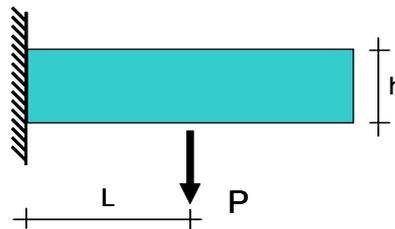
Apesar da forma triangular ser incondicionalmente estável, um SAP poderá, no entanto, ser formado por conjuntos isoladamente estáveis e conjuntos isoladamente instáveis criteriosamente dispostos de modo a formar um conjunto global estável.

A estrutura representada à direita é formada por figuras que, isoladamente, não são elementos estáveis, [CEFH], [BCDF] e [FGHJ]. No entanto, têm os seus movimentos impedidos devido ao contacto com os triângulos contíguos que são elementos estáveis. A estrutura global formada deste modo é então estável.

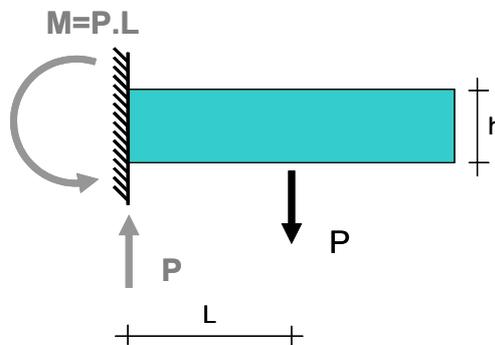


Como funciona um SAP?

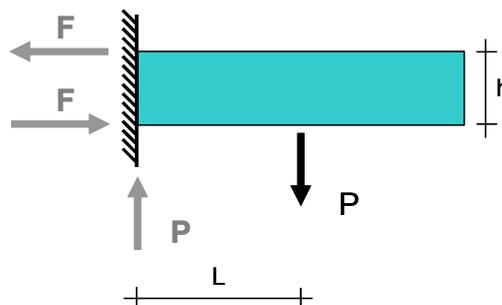
Considere-se a viga encastrada representada em seguida e sujeita a uma força P que representa o seu peso



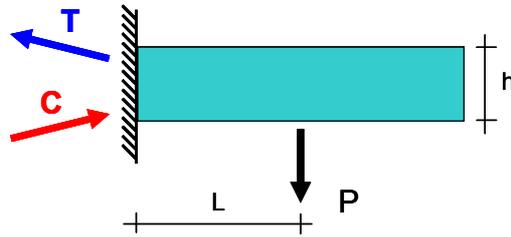
As reacções de apoio desta estrutura são então:



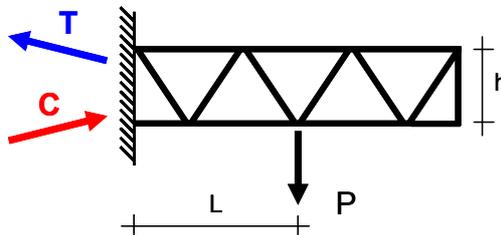
Se o momento de reacção no apoio for substituído por um binário obtém-se:



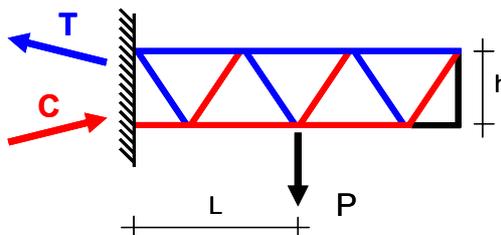
em que $F \times d = M = P \times L$. Subdividindo, em seguida, a reacção de apoio vertical em duas forças verticais com o valor $P/2$ e somando cada uma dessas forças com uma das forças F obtém-se na parte superior do apoio uma nova força T inclinada que tracciona a viga e na parte inferior uma nova força C inclinada que a comprime.



Considerando que as reacções de apoio da viga são então as forças C e T , é possível simplificar a viga original substituindo a viga cheia por uma série de barras rígidas que formam um SAP como representado em seguida

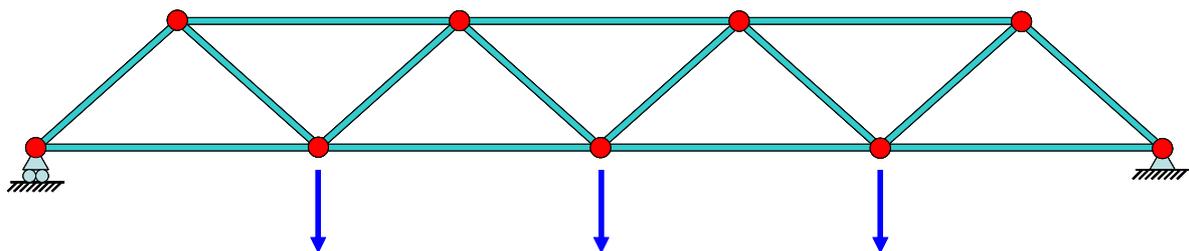


Determinando as forças a que ficam sujeitas as diversas barras verifica-se que as barras a azul estão em tracção e as barras a vermelho estão em compressão. Por outro lado, as barras que permanecem a preto têm esforços nulos e são, portanto, desnecessárias (para o carregamento considerado). A direcção das barras consideradas neste SAP não tem que ser paralela às forças de compressão e tracção que se desenvolvem no apoio dado que os esforços desenvolvidos na viga simplificada irão estar restringidos às diversas barras do SAP.

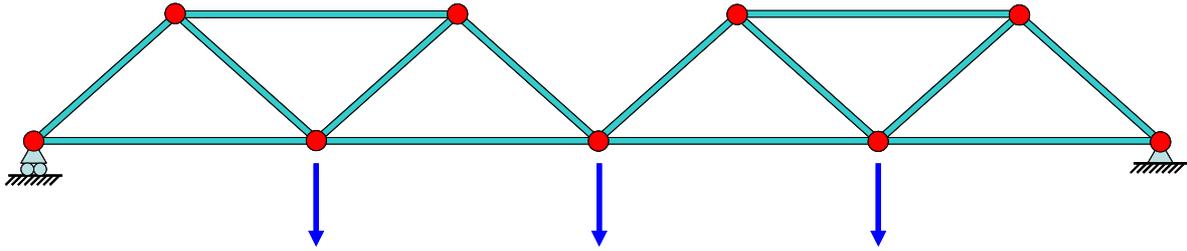


Como perceber que barras estão em tracção e em compressão sem calcular o SAP?

Considere-se o seguinte SAP sujeito ao carregamento representado.

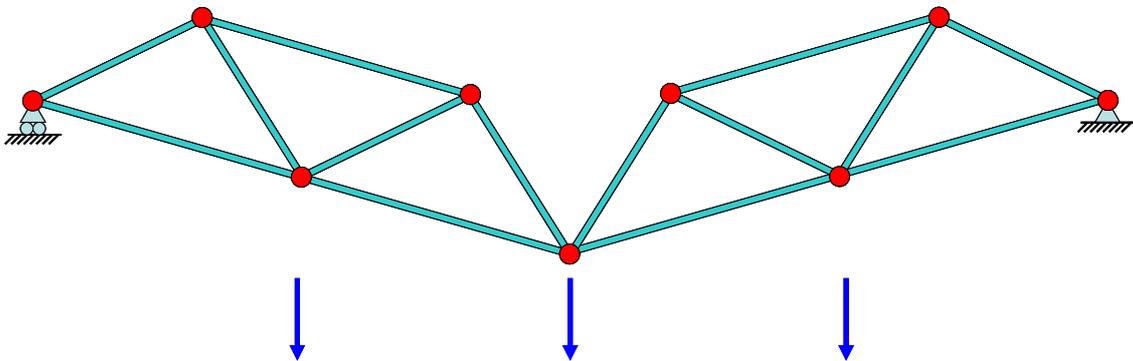


Imagine agora que uma barra deste sistema rígido era retirada.

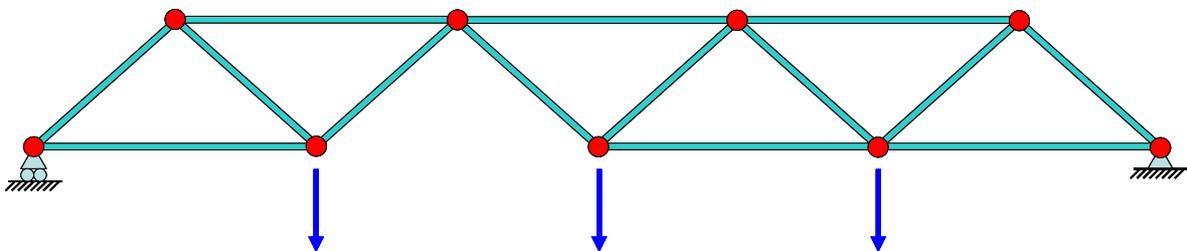


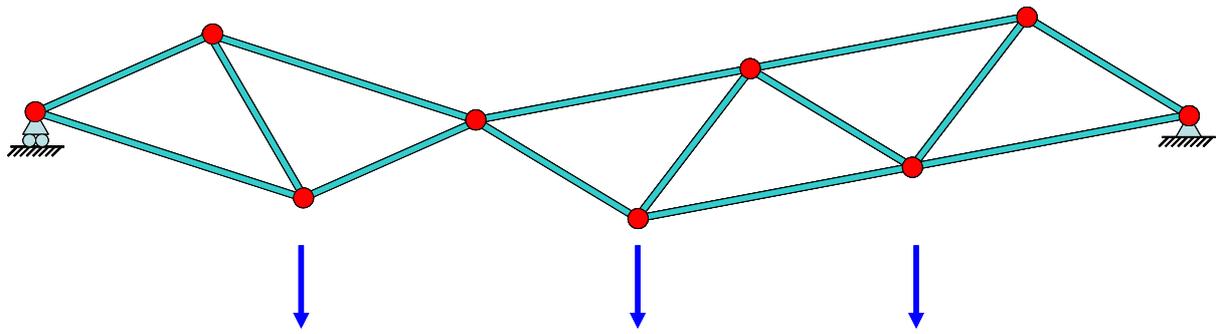
Ao ser removida uma das barras, o sistema estrutural inicialmente rígido passa a ter algum movimento não restringido o que o torna potencialmente instável (dependendo do carregamento). Imaginando como se deformaria essa nova estrutura para o carregamento representado é possível determinar a que tipo de esforço estaria sujeita a barra que foi eliminada.

Observando esta nova estrutura é possível concluir que existem dois corpos rígidos ligados na rótula central, estando o corpo da esquerda ligado ao exterior através dum apoio simples e o corpo da direita através dum apoio duplo. A acção do carregamento exterior tende a mover a estrutura para baixo o que provoca uma rotação do corpo da direita em torno do apoio duplo ao mesmo tempo que move a rótula de ligação entre os dois corpos para baixo. De forma a compatibilizar esse movimento, o corpo da esquerda tem de rodar em torno do apoio simples mas adicionalmente terá de se movimentar segundo a direcção horizontal para a direita (movimento permitido pelo apoio simples). Como resultado final, é importante observar que a distância horizontal entre os dois pontos que formavam a barra eliminada foi reduzida, o que indica que a barra existente teria de impedir esse movimento de aproximação ficando, portanto, **comprimada**.



No exemplo seguinte tente determinar qual o esforço a que estaria sujeita a barra eliminada.





Verifica-se, desta forma, que sendo um SAP constituído por um conjunto de barras lineares rotuladas nas extremidades, ligadas entre si e ao exterior de modo a formar um conjunto estável e apenas sujeitas a esforços de compressão ou de tracção, ele é, ainda, definido de modo a que se lhe for removida alguma barra, a estrutura resultante poderá tornar-se instável.

Classificação dum SAP quanto à sua estaticidade

Estaticidade externa

Considerando que a corresponde ao número de reacções de apoio da estrutura, b ao número de barras e n ao número de nós que a constituem, a estrutura será, em termos globais:

- hipostática se $2n > a + b$
- isostática se $2n = a + b$
- hiperestática se $2n < a + b$

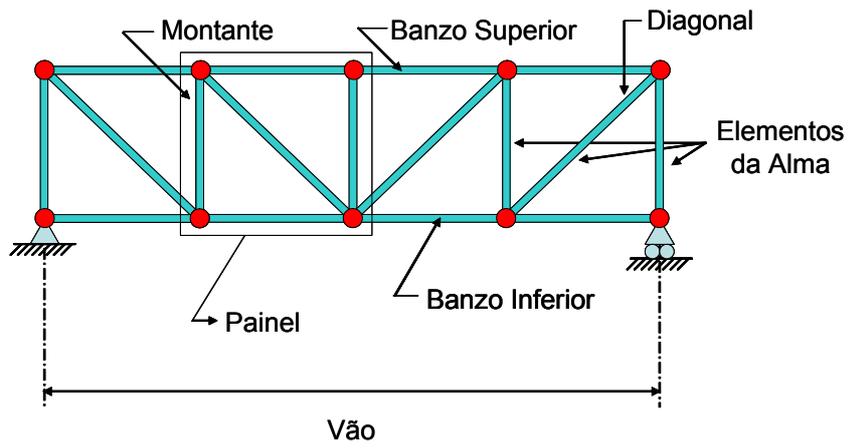
Estaticidade interna

Adicionalmente é possível definir uma nova condição quanto à estaticidade da estrutura mas agora apenas considerando a sua parte interior. Assim, a parte interna da estrutura será:

- hipostática se $b < 2n - 3$
- isostática se $b = 2n - 3$
- hiperestática se $b > 2n - 3$

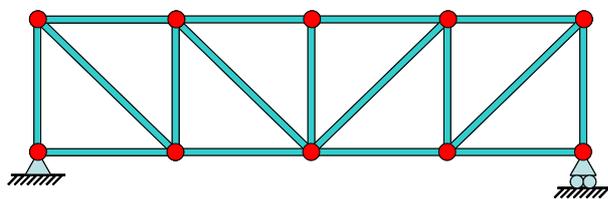
Terminologia

Apresentam-se na figura abaixo alguns dos elementos que constituem um SAP comum e sua respectiva terminologia.

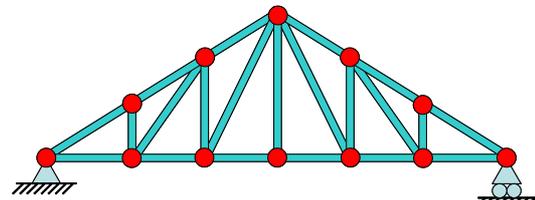


Tipos de sistemas articulados planos

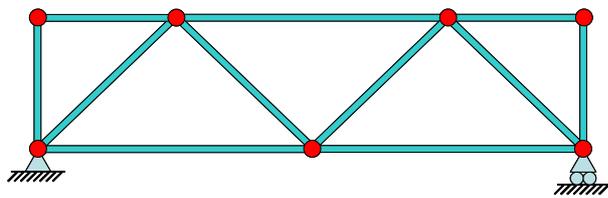
Apresentam-se em seguida alguns tipos de sistema articulados planos



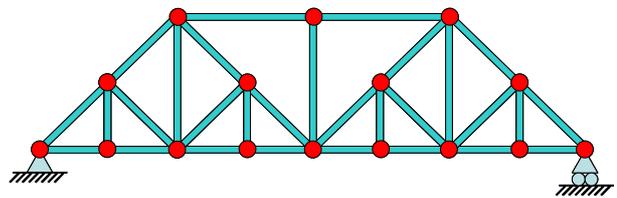
Treliça Pratt



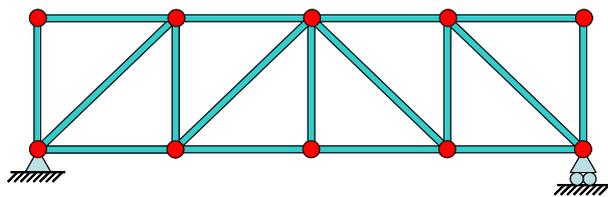
Treliça Pratt triangular



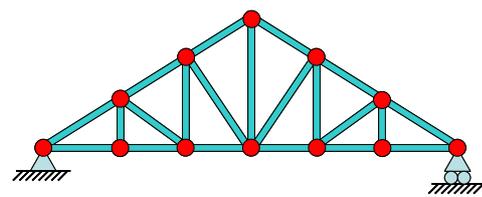
Treliça Warren



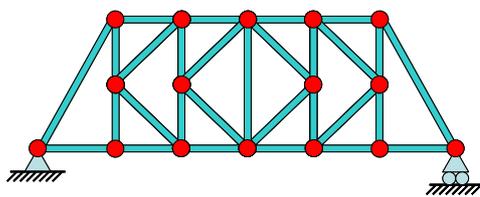
Treliça Baltimore



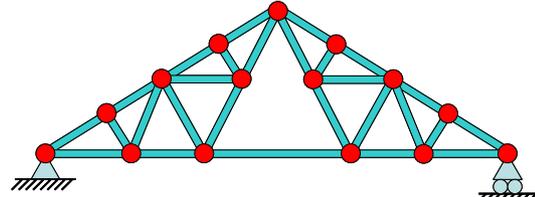
Treliça Howe



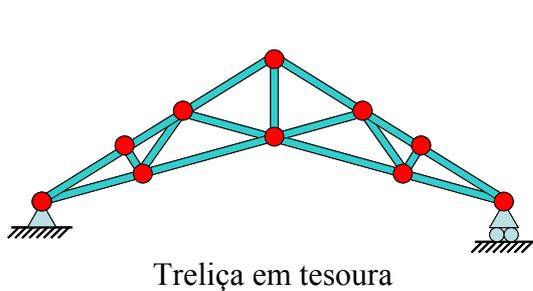
Treliça Howe triangular



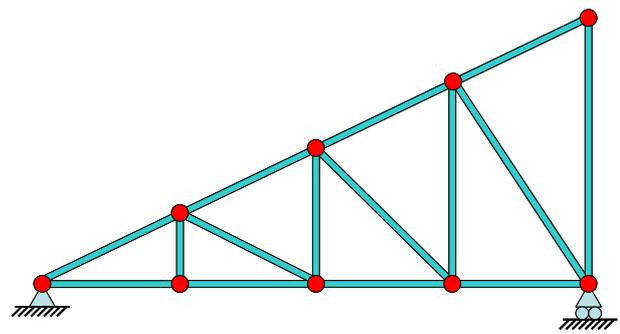
Treliça K



Treliça Fink



Treliça em tesoura



Treliça de cobertura tipo "shed"

Métodos de resolução

Método dos Equilíbrio dos Nós

Após o cálculo das reacções de apoio da estrutura, este método permite determinar os esforços em todas as barras que constituem o SAP através do equilíbrio sucessivo de cada um dos seus nós carregado pelas forças exteriores, reacções ou forças interiores (esforços) das barras que nele convergem.

O equilíbrio de cada nó é assegurado apenas por 2 equações de equilíbrio (equilíbrio de forças concorrentes e coplanares):

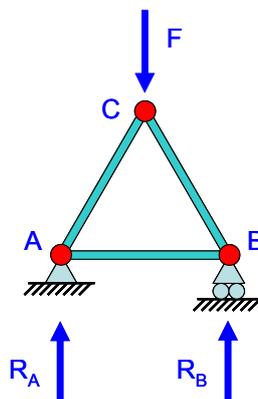
$$\sum F_x = 0 \text{ e } \sum F_y = 0$$

O método desenvolve-se, então, de acordo com os seguintes passos:

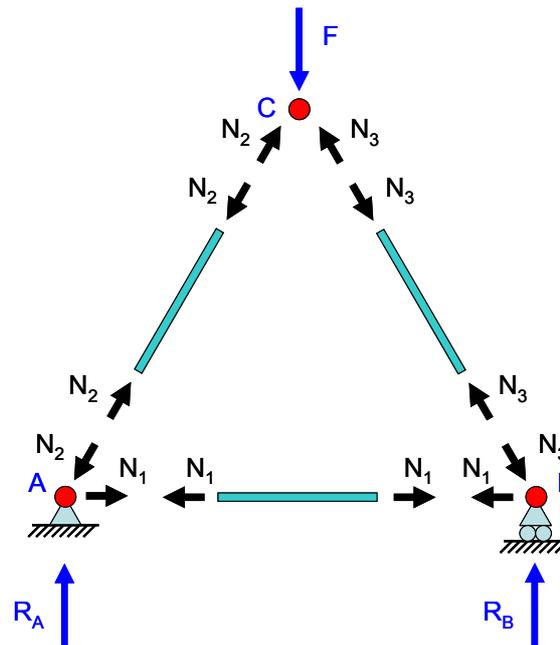
- Cálculo das reacções de apoio do SAP;
- Subdivisão do SAP nas suas várias barras e nos seus vários nós. Como cada barra é uma biela, apenas estará sujeita a um esforço constante segundo o seu eixo cujo sentido deve ser inicialmente arbitrado;
- Definição do equilíbrio de cada nó, estando cada nó sujeito a uma força de cada barra que nele concorre, às reacções de apoio que nele igualmente concorrem e às forças exteriores directamente aplicadas no nó.

Exemplo

Considere o seguinte SAP sujeito ao carregamento e às reacções de apoio representados.



A subdivisão da estrutura nas suas várias barras e nos seus vários nós corresponde à figura a seguir representada onde se identificam, igualmente, os esforços das diversas barras cujos sentidos, de tracção ou de compressão, são arbitrados.



A determinação dos esforços N_1 , N_2 e N_3 passa então pela definição de 2 equações de equilíbrio em cada nó ($\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$).

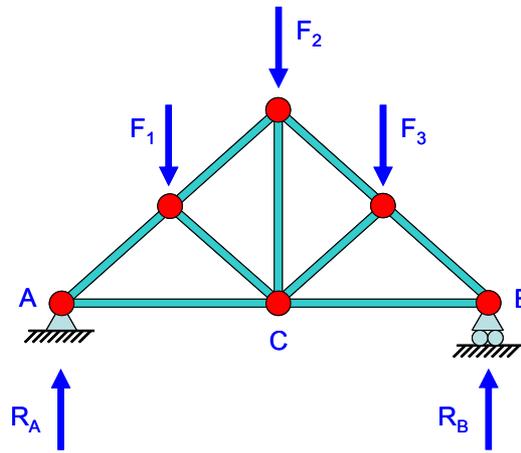
Nota: Após a determinação das reacções de apoio verifica-se que nesta estrutura apenas subsistem 3 incógnitas (N_1 , N_2 e N_3) para o cálculo das quais apenas 3 equações de equilíbrio são necessárias. Sendo que o equilíbrio dos nós A, B e C permite definir um total de 6 equações de equilíbrio, verifica-se que neste caso não seria necessário realizar o equilíbrio de todos os nós para resolver a estrutura.

Método de Ritter

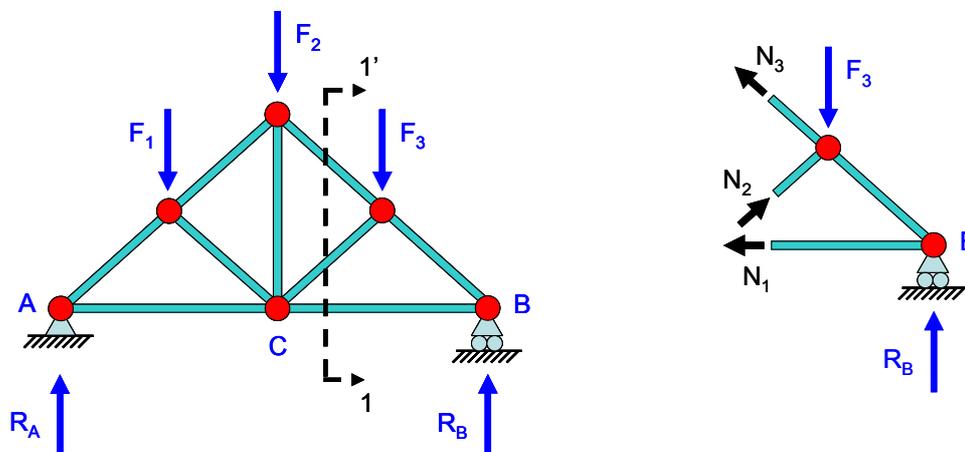
Este método consiste num processo expedito que permite determinar os esforços nalgumas barras, previamente escolhidas do SAP sem a necessidade de efectuar os sucessivos equilíbrios dos nós da estrutura. Para tal o método pressupõe a realização de cortes na estrutura definindo uma secção contínua não necessariamente rectilínea e que atinja, em geral, apenas 3 barras não concorrentes no mesmo nó e nunca cortando mais do que uma vez uma mesma barra. Estando o SAP em equilíbrio estático em relação ao seu carregamento exterior, também estará em equilíbrio qualquer parte desse sistema. Ao cortar a estrutura, o equilíbrio de qualquer uma das 2 partes resultantes do corte é definido entre as forças exteriores e os esforços internos das barras seccionadas.

Exemplo

Considere o seguinte SAP sujeito ao carregamento e às reacções de apoio representados.

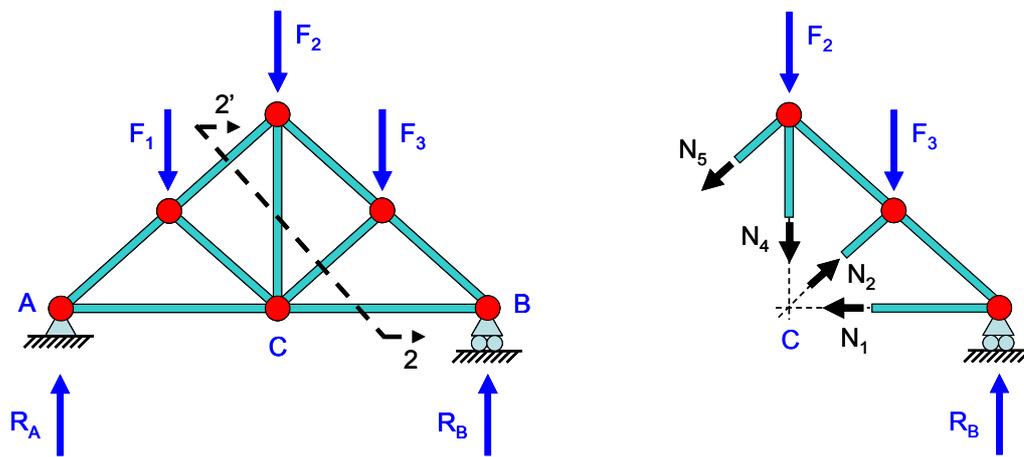


Efectuando o corte 1-1' representado e considerando apenas a parte da direita da estrutura (por ter menos forças) obtém-se:

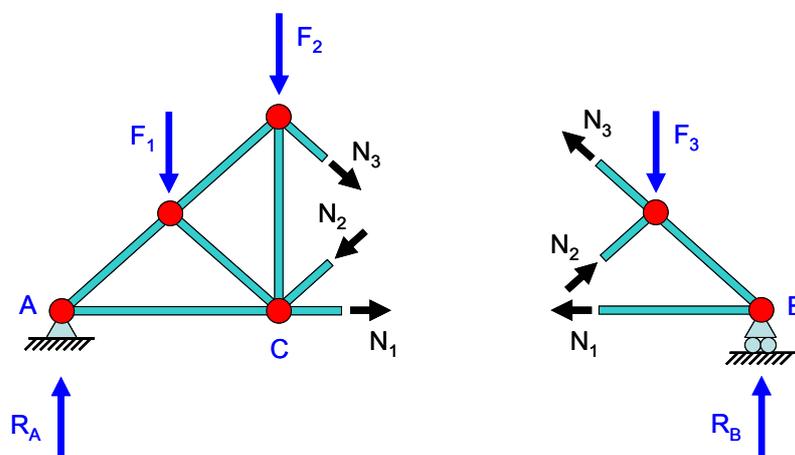


Observa-se que esta parte da estrutura está em equilíbrio devido à acção dos esforços N_1 , N_2 e N_3 (cujos sentidos foram arbitrados) das barras seccionadas, da força exterior F_3 e da reacção de apoio R_B . Sobre a parte da estrutura considerada os esforços N_1 , N_2 e N_3 passam a ser forças exteriores cujos valores se querem determinar. Para tal é necessário definir 3 equações de equilíbrio para porção da estrutura considerada (porque temos 3 incógnitas) devendo, no entanto, ser previamente determinada a reacção de apoio R_B da forma usual.

É possível, no entanto, efectuar cortes em que mais do que 3 barras são seccionadas e ainda assim obter um determinado esforço pretendido. Por exemplo, efectuando o corte 2-2' representado e considerando apenas a parte da direita da estrutura (salientando-se que este corte secciona 4 barras) é possível determinar o esforço N_5 . Atendendo a que N_1 , N_2 e N_4 são concorrentes no ponto C, (ao escolher-se a porção da direita da estrutura este ponto fica fora desta sub-estrutura, mas tal não implica que ele não possa ser considerado), se for definida uma equação de somatório de momentos no ponto C ($\sum M_C = 0$) as únicas forças que contribuem para essa equação são N_5 , a força F_3 e a reacção de apoio R_B , que deverá ser previamente calculada. Assim o esforço N_5 é directamente determinado apenas com uma equação de equilíbrio e que resulta dum corte que secciona 4 barras.



Após a determinação dos esforços das barras escolhidas é, igualmente, importante perceber se esses esforços correspondem a barras à tracção ou à compressão. Considere-se as duas partes de uma estrutura seccionada abaixo representadas



Admitindo que os sentidos dos esforços N_1 , N_2 e N_3 estão correctos, verifica-se, por observação desta figura que, qualquer que seja a parte da estrutura considerada, a força N_1 , por exemplo, tende a mover a barra onde actua para o exterior da parte da estrutura em consideração e que a força N_2 tende a exercer um movimento contrário sobre a barra onde actua tentando, portanto, movê-la para o interior da parte da estrutura em consideração. Conclui-se por esta observação que a barra que contém N_1 está à tracção enquanto que a barra que contém N_2 está à compressão. Por observação semelhante pode concluir-se que a barra que contém N_3 está à tracção.

Concretização dos nós rotulados

Consoante o material do SAP (betão armado, aço ou madeira, por exemplo) a concretização dos nós rotulados é realizada através de técnicas distintas. No caso de estruturas metálicas, os nós podem ser realizados soldando ou aparafusando as barras a uma chapa comum, chapa *Goussset*, (Figuras 1 e 2) ou então fazendo passar um parafuso de grandes dimensões através das barras (Figura 3, 4 e 5). No caso de estruturas de madeira existem igualmente diversas opções para a concretização dos nós, como por exemplo aparafusando as barras a uma chapa *Goussset* exterior (Figura 6) ou embutida nas barras (Figura 7) ou ligando as barras que convergem num nó através de chapas metálicas denteadas prensadas (Figura 8). Em estruturas de betão, (Figura 9), não existem geralmente sinais exteriores de qualquer medida específica com vista à concretização das rótulas nos nós das barras havendo, portanto, continuidade total entre as diversas barras da estrutura. No entanto, poderão em certos

casos existir medidas especiais ao nível da definição das armaduras dessas barras que conduzem à formação de rótulas.

Como se pode observar pela descrição das técnicas geralmente usadas na realização dos nós, a idealização dos nós das barras dum SAP como sendo perfeitamente articulados é, na prática, difícil de concretizar. Na realidade existe nos nós destas estruturas alguma capacidade de impedir a sua rotação ao contrário do que é admitido pelas rótulas idealizadas no cálculo. No entanto, essa capacidade de impedir a rotação é, na análise, desprezada ou por ser bastante baixa quando comparada com a indeformabilidade axial das barras (em particular nas estruturas de betão armado ou nas ligações metálicas soldadas) ou, ainda em certos casos, devido ao facto da sua quantificação ser bastante complexa (em particular nas ligações aparafusadas ou com chapas denteadas nas estruturas de madeira).

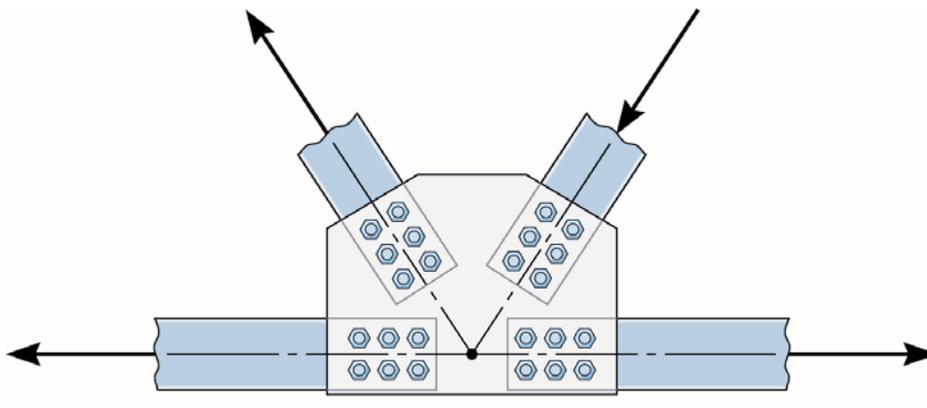


Figura 1

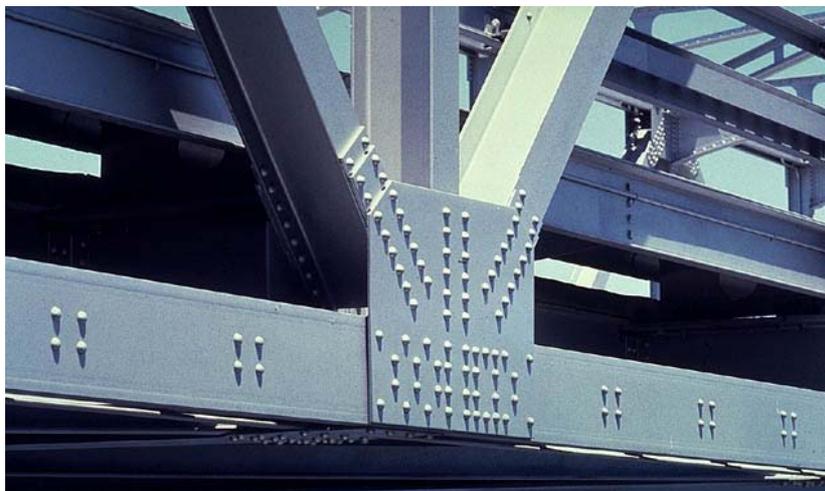


Figura 2

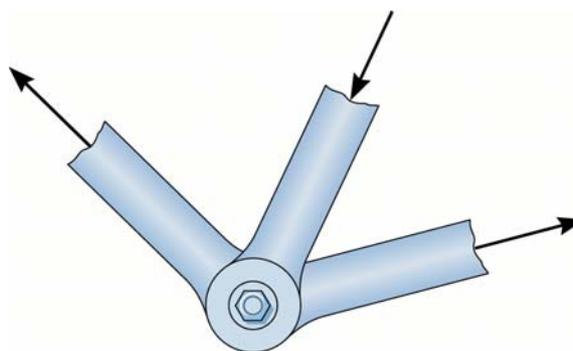


Figura 3



Figura 4



Figura 5

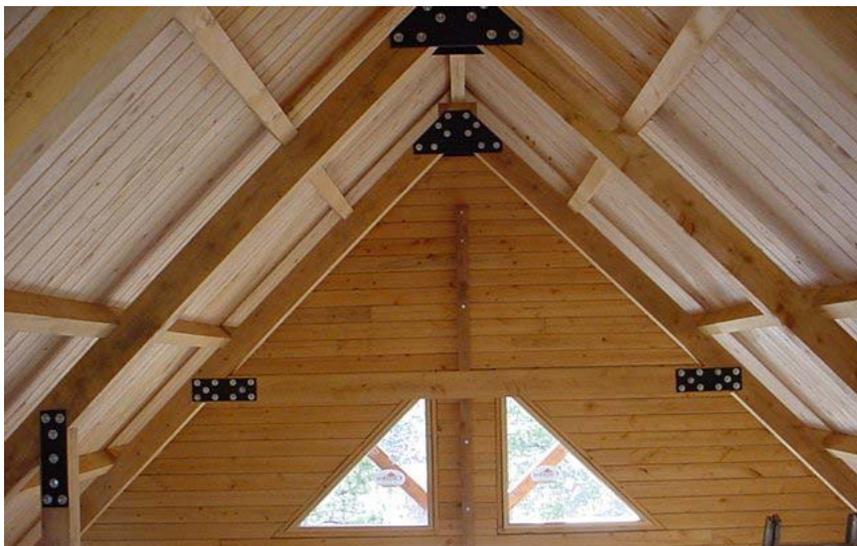


Figura 6

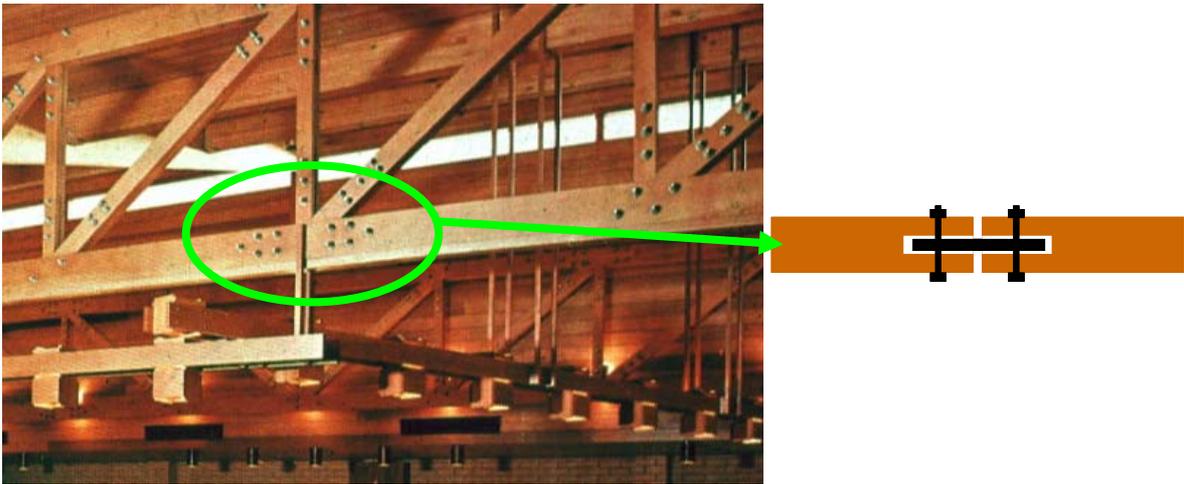


Figura 7

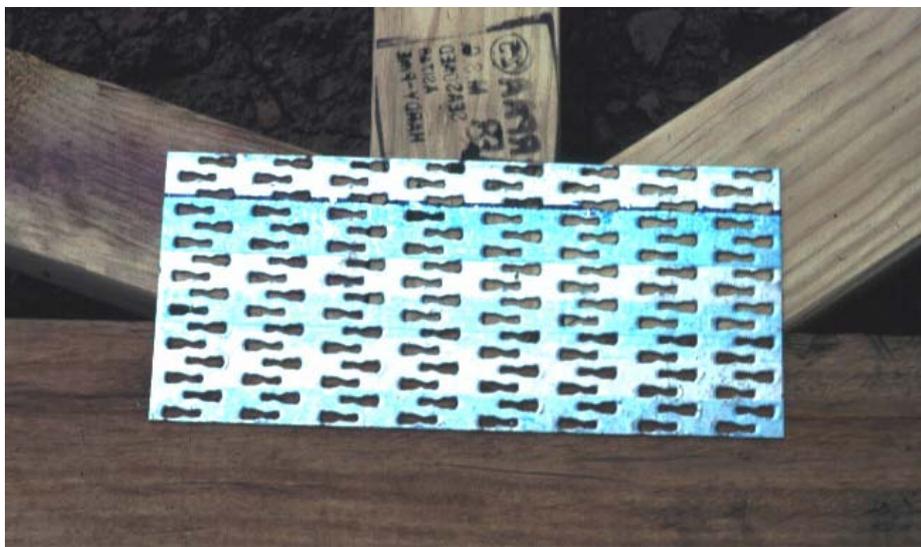


Figura 8



Figura 9

Exemplos de sistemas articulados planos

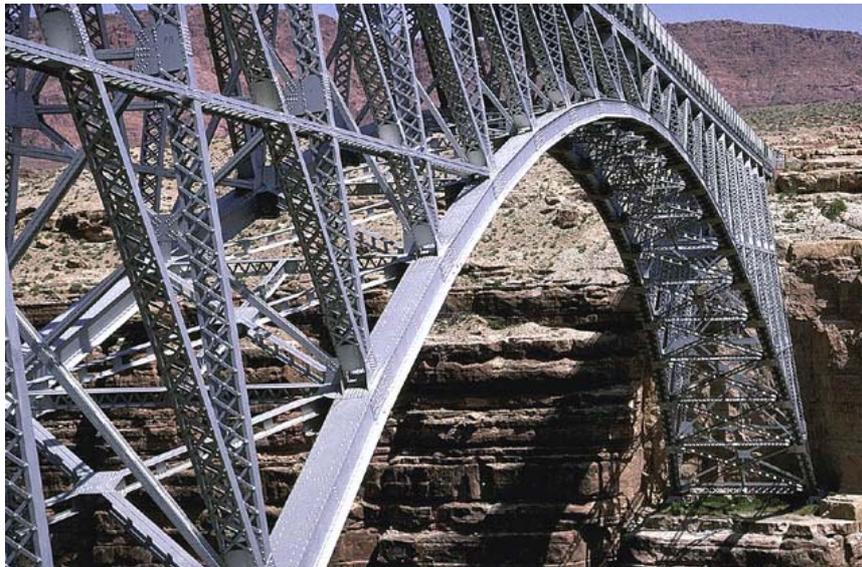
Apresentam-se em seguida algumas imagens de sistemas articulados planos. Embora alguns destes exemplos possam estar englobados numa estrutura tridimensional, o seu cálculo foi efectuado considerando o sistema articulado como uma estrutura plana apenas sujeita a cargas no seu plano.



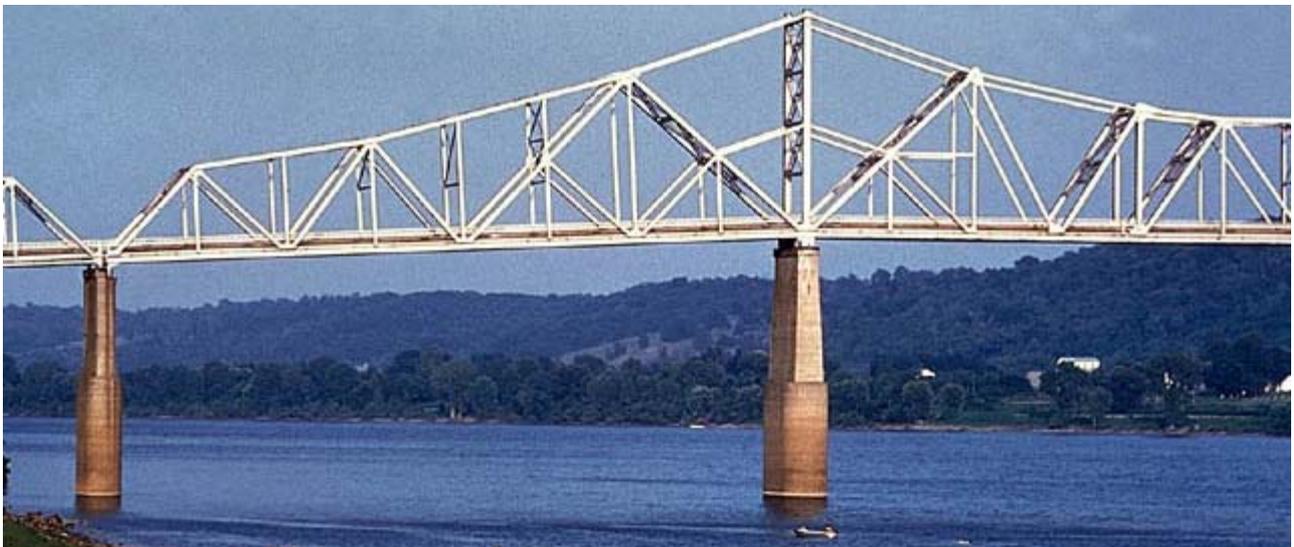
Tower Bridge sobre o rio Tamisa, Londres, Inglaterra



Ponte Navajo, Marble Canyon, Arizona, EUA.



Ponte Navajo, Marble Canyon, Arizona, EUA.



Ponte sobre o rio Ohio, Madison, Indiana, EUA.



Ponte levadiça, delta do rio Sacramento, próximo de Rio Vista, California, EUA.



Ponte levadiça, delta do rio Sacramento, próximo de Rio Vista, California, EUA.



Terminal de autocarros de Port Authority, Nova Iorque, EUA (em construção).



Edifício de escritório da IBM, Pittsburgh, Pennsylvania, EUA.



Edifício Alcoa, San Francisco, California, EUA.



Edifício John Hancock, Chicago, Illinois, EUA





Edifício Transamerica, San Francisco, California, EUA.



Base do edifício Transamerica, San Francisco, California, EUA.