Um Método para o cálculo do mdc e do mmc[1]

Roberto Ribeiro Paterlini

Departamento de Matemática da UFSCar

1 Introdução

Antes de apresentarmos um novo método para o cálculo do mdc e do mmc de dois números, vamos recordar algumas definições: dados os números naturais a e b, seu mdc (*máximo divisor comum*) é, como o próprio nome indica, o maior dos números que dividem tanto a quanto b. Enquanto seu mmc (*mínimo múltiplo comum*) é o menor dentre todos os números positivos que sejam, simultaneamente, múltiplos de a e b. O número 1 é divisor de qualquer número e, se os números a e b não admitem outro divisor comum, tem-se que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e diz-se que a e b são *primos entre si*.

O mdc e o mmc aparecem em vários resultados teóricos e na resolução de problemas, mas, nos nossos cursos, sua mais comum aplicação é no cálculo com frações ordinárias. Embora nesse contexto sua utilização seja dispensável, ao preço de trabalharmos, às vezes, com números maiores, é na hora de simplificar frações que os textos didáticos usam o mdc e é na hora de comparar, somar ou subtrair frações, que aparece o mmc.

2 Cálculo do mdc e do mmc

Se os números a e b estão decompostos em fatores primos, é fácil encontrar a decomposição em fatores primos de seu mdc e seu mmc. Como exemplo, consideremos os números 2100 e 198. Ora, como

$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{e} \quad 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

qualquer divisor comum a 2100 e 198 só pode ter 2 e 3 como fatores primos e somente com expoentes 0 ou 1. O maior de todos será, então, 2×3, isto é,

$$\text{mdc}(2100, 198) = 2 \times 3 = 6$$

Daí a regra já conhecida: o mdc é o produto dos fatores primos que aparecem tanto na decomposição de a quanto na de b, cada um deles elevado ao menor dos dois expoentes com que aí aparece.

Analogamente, qualquer múltiplo comum a 2100 e 198 deve ter, como fatores primos: 2 (com expoente ≥ 2), 3 (com expoente ≥ 2), 5 (com expoente ≥ 2), 7 (com expoente ≥ 1), e 11 (com expoente ≥ 1). Logo, o menor deles deve ser $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$, isto é,

$$\text{mmc}(2100, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69300$$

[1]Publicado na Revista do Professor de Matemática, n.º 13, 2.º semestre de 1988, págs. 34 a 37. Republicado em Matemática Ensino Médio, Coleção Explorando o Ensino vol. 1, Brasília, Ministério da Educação, 2004.

Daí a regra: o mmc é o produto de todos os fatores primos que aparecem na decomposição de a ou na de b, cada um deles elevado ao maior expoente com que aparece.

O método mais conhecido para o cálculo do mmc de dois ou mais números naturais utiliza a decomposição simultanea em números primos. O método é, geralmente, implementado mediante a disposição exemplificada abaixo.

$$\begin{array}{rr|l} 2100 & 198 & 2 \\ 1050 & 99 & 2 \\ 525 & 99 & 3 \\ 175 & 33 & 3 \\ 175 & 11 & 5 \\ 35 & 11 & 5 \\ 7 & 11 & 7 \\ 1 & 11 & 11 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Novamente se tem

$$\text{mmc}(2100, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69300$$

3 O outro método

Uma variação deste método simplifica os cálculos e fornece, ao mesmo tempo, o mmc e o mdc dos números. Exemplificamos calculando o mmc e o mdc dos mesmos números 2100 e 198:

$$\begin{array}{rr|l} 2100 & 198 & 2 \\ 1050 & 99 & 3 \\ 350 & 33 & \end{array}$$

Novamente temos

$$\text{mdc}(2100, 198) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{e} \quad \text{mmc}(2100, 198) = 6 \times 350 \times 33 = 69300$$

Nesta disposição, um número primo comparece na coluna da direita apenas quando divide ambos os números à sua esquerda, na mesma linha. As divisões terminam quando isso não mais for possível, o que significa que encontramos dois números primos entre si nas duas colunas da esquerda.

O mdc é o produto dos números que estão na coluna da direita e o mmc, o produto deste mdc pelo dos números primos entre si que restaram na última linha à esquerda.

4 Justificativa do novo método

Colocando na coluna da direita só os primos que dividem ambos os números da esquerda, estamos, certamente, relacionando fatores primos do mdc. Levando o processo até chegarmos a dois números primos entre si (que não admitem mais nenhum divisor comum a não ser o 1), teremos esgotado os fatores primos do mdc. Assim, o produto $2 \times 3 = 6$ dos primos da coluna da direita é o mdc dos números dados inicialmente.

Por outro lado, devido à maneira como se chegou aos números primos entre si, 350 e 33, tem-se que $2100 = 6 \times 350$ e $198 = 6 \times 33$. Então, qualquer múltiplo de 2100 deve conter os fatores 6 e 350 e qualquer múltiplo de 198 deve conter os fatores 6 e 33; logo, o menor de todos os múltiplos comuns é aquele que se obtem do produto dos fatores 6, 350 e 33. (O leitor observa que é, nesse ponto, que entra o fato de 350 e 33 serem primos entre si, pois se houvesse, ainda, um número diferente de 1 dividindo 6, 350 e 33, então o produto dos três não seria o menor dos múltiplos comuns.)

5 Observações

5.1 Os argumentos acima, para justificar o método, no caso particular estudado do cálculo do mdc e do mmc de 2100 e 198, se transportam ao caso geral de dois números quaisquer a e b, sem mudanças significativas, mas sob uma notação muito carregada, a partir da decomposição em fatores primos de a e de b. Por isso deixamos de apresentá-la aqui.

5.2 Este método se aplica, também, ao cálculo do mdc e do mmc de mais do que dois números. Deixamos ao leitor a tarefa de fazer as devidas (e poucas) adaptações nos argumentos apresentados.

5.3 A justificativa exposta acima põe à mostra uma relação importante entre o mdc, o mmc e o produto dos dois números. Com efeito, revendo o processo apresentado, o leitor deduzirá que

$$a \times b = \mathrm{mmc}(a, b)\ \mathrm{mdc}(a, b)$$

ou, na forma que é mais utilizada,

$$\mathrm{mmc}(a, b) = \frac{a \times b}{\mathrm{mdc}(a, b)}$$

6 Uma disposição simplificada do novo método

Uma outra disposição de utilização desse mesmo processo é a seguinte: forma-se uma fração com os dois números dos quais se pretende calcular o mdc e o mmc. Vai-se simplificando a fração (por divisão pelos fatores primos comuns, de preferência na ordem, para que não se deixe escapar algum) até chegarmos a uma fração irredutível (isto é, com numerador e denominador primos entre si), tendo o cuidado de, a cada passo, anotar (por exemplo, abaixo do sinal de =) o número pelo qual foram divididos os termos da fração. No final do processo, o mdc é o produto dos números anotados abaixo do sinal de =, e o mmc é o produto desse mdc pelo numerador e pelo denominador da fração irredutível. Ou seja,

$$\frac{2100}{198} \underset{2}{=} \frac{1050}{99} \underset{3}{=} \frac{350}{33}$$

e temos novamente

$$\mathrm{mdc}(2100, 198) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{e} \quad \mathrm{mmc}(2100, 198) = 6 \times 350 \times 33 = 69300$$

É claro que o processo acima se torna redundante se estamos procurando o mdc entre numerador e denominador de uma fração para efeito de simplificá-la. Isto só reforça, entretanto, a idéia de que não é nesse contexto que o mdc apresenta sua força como ferramenta matemática.

7 Referências bibliográficas

[1] *Arithmetic Teacher,* volume 12, número 4, dezembro de 1984.
[2] Monteiro, L. H. J., *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S. A., 1969.
[3] Sidki, S., *Introdução à Teoria dos Números.* Sociedade Brasileira de Matemática, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.