por Lucía Fernández-Suarez
[Universidade do Minho]

A Característica de Euler?

Todos sabemos que o número de vértices mais o número de faces dos poliedros usuais é igual ao número de arestas mais dois. Porém, será que esta relação se verifica para todo o poliedro? Tem algum tipo de aplicação ou trata-se de uma propriedade anedótica? Com a introdução de um invariante numérico básico em topologia, a característica de Euler, é possível encontrar respostas para todas estas indagações.

Em 1750, numa carta dirigida a Christian Goldbach, Leonhard Euler escreve:

"Em todo o sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de vértices excede em dois o número de arestas"

Com esta afirmação Euler identifica[1] três tipos de "peças" diferentes na superfície de tal sólido, de dimensões 0, 1 e 2 (vértices, arestas e faces) e estabelece a relação:

$$b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

onde b_k designa o número de "peças *k-dimensionais*", k=0,1,2. A soma alternada b_0-b_1+b_2 chama-se *característica de Euler* do poliedro (da superfície do poliedro, para sermos exactos) e a propriedade anterior enuncia-se como *"a superfície de um poliedro convexo*[2] *tem característica de Euler igual a 2"*. Não é difícil pensar numa extensão da definição anterior: se um objecto está construído a partir de "peças" de dimensões 0,1, ...,n, chamamos característica de Euler desse objecto à soma alternada do número de "peças" em cada dimensão.

Uma "peça *n-dimensional*" pode ser formalizada pelo conceito de um *n-símplice*. Um *n-símplice* com vértices a_0, a_1, ...a_n de $\mathbf{R}^N$ é o subconjunto de $\mathbf{R}^N$ definido por:

$$\{x \in \mathbf{R}^N : x=t_0a_0+t_1a_1+...t_na_n,\ t_k\geq 0,\ t_0+t_1+...t_n\leq 1\}$$

com a_0, a_1, ...a_n pontos de $\mathbf{R}^N$ em posição geral, isto é, não contidos num plano *n-dimensional*. Por exemplo (Figura 1), um 1-*símplice* com vértices a_0 e a_1 é o segmento com extremos a_0 e a_1, um 2-*símplice* com vértices a_0, a_1 e a_2 é o triângulo com vértices a_0, a_1 e a_2, um 3-*símplice* é um tetraedro sólido.

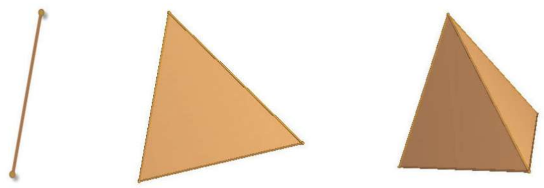

Figura 1

Um poliedro *n-dimensional* ou *complexo simplicial n-dimensional* é a reunião de um número finito de símplices de dimensão menor ou igual a n de tal modo que dois símplices diferentes têm intersecção vazia ou intersectam-se ao longo de um símplice de dimensão inferior. A característica de Euler de um poliedro *n-dimensional K*, representada normalmente pela letra grega χ, é a soma alternada:

$$\chi(K)=b_0-b_1+....(-1)^n b_k$$

onde b_k designa o número de *k-símplices* para k=0,1, .., n. A superfície do octaedro e a do grande dodecaedro

[1]Nos capítulos 1 a 9 de [1] encontra-se uma detalhada e amena exposição histórica desta descoberta.
[2]Quando L. Euler escreve "sólido limitado por faces planas" está a referir-se aos poliedros convexos.

estrelado são poliedros bidimensionais com característica de Euler igual a 2; o octaedro sólido é um poliedro tridimensional com característica de Euler igual a 1 (Figura 2).

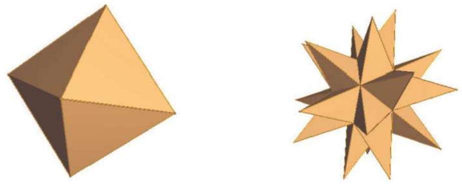

Figura 2

Notemos que a definição de poliedro bidimensional parece mais restritiva que a definição usual de poliedro, pois só consideramos como "peças bidimensionais" os triângulos (2-*simplices*) e não quaisquer polígonos. Na realidade, como todo o polígono pode decompor-se em triângulos essa restrição não faz qualquer diferença.

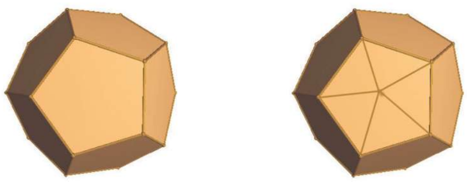

Figura 3

Além do mais, se partimos de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces poligonais e fizermos subdivisões baricêntricas nas faces (Figura 3), a característica de Euler do poliedro resultante (que tem faces triangulares) é precisamente $V-A+F$. Efectivamente, ao dividir baricentricamente um polígono com n-lados em n triângulos estamos a criar n-1 faces, n arestas e 1 vértice pelo que o cômputo total alternado permanece igual.

Os poliedros regulares, os prismas e anti-prismas são poliedros bidimensionais[3] com característica de Euler igual a 2. Mas há exemplos mais exóticos de poliedros bidimensionais como o *cubo truncado perfurado* e a *stella octângula* (Figura 4).

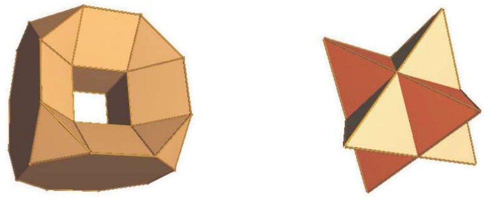

Figura 4

O *cubo truncado perfurado* tem 32 faces (12 quadrados, 4 octógonos e 16 triângulos), 64 arestas e 32 vértices pelo que a sua característica de Euler é 0. A *stella octângula* define-se usualmente como a reunião de dois tetraedros regulares[4] e é formada por 32 faces (incluindo 8 triângulos interiores não visíveis desde o exterior!), 36 arestas e 14 vértices, pelo que a sua característica de Euler é 10. O poliedro definido só pelos triângulos exteriores da *stella octângula* tem característica de Euler 2.

A propriedade fundamental da característica de Euler (que explica, por exemplo, porque todos os poliedros convexos têm a mesma característica) é que se trata de um *invariante topológico*[5]. Isto é, se K e K' são poliedros *n-dimensionais homeomorfos*, ou seja, se existe uma aplicação contínua e bijectiva entre eles com inversa contínua, então $\chi(K)=\chi(K')$. Poincaré provou este resultado nada trivial usando argumentos difíceis de explicar sucintamente.

Não é fácil dar uma ideia intuitiva exacta do que significa ser homeomorfo, mas costuma dizer-se que dois objectos são homeomorfos se se podem deformar continuamente um no outro[6]. Por exemplo, se imaginarmos os poliedros feitos de um material elástico, ao insuflar no seu interior uns deformar-se-iam numa superfície esférica (os poliedros regulares, os prismas, a superfície visível da *stella octângula*), outros numa bóia de praia (o *cubo truncado perfurado*), outros num balão com oito balões colados (a *stella octângula*)...

O Teorema de Poincaré diz-nos que todos os poliedros que se deformem no mesmo objecto têm a mesma característica de Euler, pois são homeomorfos. Aliás, esse teorema permite estender a definição de

[3]Historicamente o termo poliedro designava o objecto sólido (*sólidos platónicos*). Actualmente o termo poliedro usa-se tanto para o sólido como para a sua superfície.
[4]Na literatura aparece frequentemente que a *Stella Octângula* tem 8 faces, 12 arestas e 8 vértices e número de Euler 4 (não são contados os vértices e as arestas que aparecem nas intersecções dos tetraedros). Este "número de Euler" não corresponde ao invariante topológico chamado característica de Euler, que é 10. Este tipo de discordância encontra-se na literatura em muitos poliedros estrelados.
[5]De facto, é um invariante *do tipo de homotopia*.
[6]A ideia de deformação contínua parece envolver uma noção de espaço exterior (o lugar onde a deformação ocorre) que não está presente no conceito de homeomorfismo e que em topologia se chama *isotopia*.

característica de Euler a uma classe muito maior de objectos: a classe dos objectos homeomorfos a poliedros ou *espaços topológicos triangularizáveis*. Por exemplo, podemos definir a característica de Euler da bóia de praia (o toro) como 0 pois todo o poliedro homeomorfo a ela é homeomorfo ao *cubo truncado perfurado* (Figura 4) que tem característica de Euler 0.

Embora a demonstração geral seja difícil de resumir[7], é fácil apresentar um argumento bastante convincente de que todo o poliedro homeomorfo a uma esfera tem característica de Euler 2. Recordemos que podemos supor o poliedro formado por triângulos e imaginemos o poliedro construído em material elástico. Se o poliedro se deformar continuamente numa esfera, as suas arestas deformam-se em arcos que definem um mapa da esfera com regiões triangulares (Figura 5).

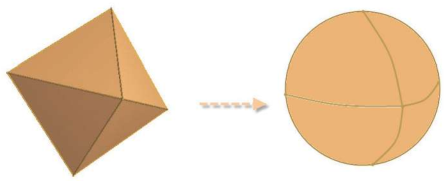

Figura 5

Este tipo de mapas na esfera podem ser desenhados a partir de um "triângulo inicial na esfera", realizando sucessivamente alguma das operações seguintes:

a) adicionar um novo vértice e uma nova aresta;

b) unir dois vértices que já existem criando uma nova face.

O triângulo inicial determina na esfera um mapa com duas regiões triangulares (uma interior ao triângulo e outra exterior), 3 arestas e 3 vértices. Isto é, o mapa inicial tem característica de Euler 2. As operações a) e b) não alteram a característica de Euler do mapa, pelo que o mapa final vai ter também característica de Euler 2.

A característica de Euler tem inúmeras aplicações. Indicamos em seguida algumas das mais conhecidas e referências onde podem ser encontradas em detalhe:

1. Existem apenas cinco poliedros regulares (ver a seguir);

2. Coloração de mapas: o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa numa superfície depende da característica de Euler dessa superfície [3];

3. A característica de Euler pode ser utilizada para provar que um grafo não é plano [1];

4. A característica de Euler restringe a curvatura de uma superfície através do famoso *Teorema de Gauss-Bonnet*[4].

Terminamos então este artigo usando a Fórmula de Poliedros de Euler para mostrar que existem no máximo[8] cinco poliedros regulares.

Suponhamos que K é um poliedro regular com F faces, isto é, as F faces de K são polígonos regulares e congruentes de m lados de tal modo que cada vértice incide exactamente em n faces. Imaginemos K como um puzzle feito com polígonos. Antes de montar o puzzle temos F polígonos, mF arestas (que serão coladas duas a duas) e mF vértices (que serão colados em grupos de n vértices). Assim, se A e V são, respectivamente, o número de arestas e vértices do poliedro (já montado) tem-se que:

$$2A = mF \quad \text{e} \quad nV = mF$$

Estas igualdades permitem expressar A e V em função de F, m e n. Substituindo na Fórmula de Euler:

$$2 = V - A + F$$

obtemos

$$F = 4n/(2m - nm + 2n)$$

Como n é positivo e o número de faces F também deve ser positivo, resulta que m e n devem satisfazer a condição:

$$2m - nm + 2m > 0$$

Os únicos valores que verificam esta condição são:

• $m=3$, $n=3$ que implica $F=4$ (configuração do *tetraedro*);

• $m=3$, $n=4$ que implica $F=8$ (configuração do *octaedro*);

• $m=3$, $n=5$ que implica $F=20$ (configuração do *icosaedro*);

• $m=4$, $n=3$ que implica $F=6$ (configuração do *cubo*);

• $m=5$, $n=3$ que implica $F=12$ (configuração do *dodecaedro*). M

[7] Consultar capítulo 2 de [2].

[8] A prova aqui apresentada determina as únicas configurações possíveis para o poliedro. E essas configurações podem realizar-se nos bem conhecidos *sólidos platónicos*.

Referências

[1] **Richeson, David S.** (2008). *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princenton University Press.

[2] **Hatcher, Allen** (2002). *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

[3] **Firby, P.A. , Gardiner, C.F.** (2001). *Surface Topology*, Horwood Publishing Ltd.

[4] **Bloch, Ethan D.** (1996). *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, Birkhauser.

Software:

Os desenhos de poliedros foram realizados com o programa Small Stella, de Robert Webb (consultar http://www.software3d.com/Stella.php).