$V - A + F = 2$. EXISTE O POLIEDRO?

Eduardo Wagner
Comitê Editorial da RPM

Introdução

Em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$. Este é o Teorema de Euler para poliedros. A simplicidade do enunciado, a sua generalidade e a facilidade de ilustrá-lo com belos desenhos o tornam atraente, ou mesmo fascinante, para o estudante. Ao longo da história (o teorema foi descoberto em 1758), diversas demonstrações apareceram, mas nem todas corretas ou completas.

Na **RPM** 03, num artigo do Prof. Zoroastro Azambuja Filho, encontra-se uma demonstração elementar e muito bonita do teorema; o leitor pode ver também a mesma idéia na demonstração que se encontra no volume 2 do livro *Matemática do ensino médio*, publicado pela SBM.

A pergunta natural que se impõe é a seguinte: dados três números naturais V, A e F tais que $V - A + F = 2$, existe sempre um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces? A resposta é gritantemente **não**. Por exemplo, $V = 7$, $A = 9$ e $F = 4$ satisfazem a relação de Euler $V - A + F = 2$, mas não são números de nenhum poliedro, uma vez que com 4 faces só existe o tetraedro, que tem 4 vértices e 6 arestas.

Portanto, que condições os números V, A e F devem satisfazer, além da relação de Euler, para que possamos garantir a existência de um poliedro com esses números de vértices, arestas e faces? Obter a resposta para essa pergunta é o objetivo deste artigo.

Condições necessárias

Imagine um poliedro (ver a definição no Apêndice) P com todas as suas faces triangulares (como o tetraedro, por exemplo). Nesse caso, $3F = 2A$, uma vez que cada aresta é lado de exatamente duas faces. Entretanto, se P possui alguma face não triangular, então $3F < 2A$.

É portanto condição necessária que $3F \leq 2A$. (1)

Imagine agora que, no poliedro P, cada vértice seja ponto comum a três arestas (como no cubo, por exemplo). Nesse caso, $3V = 2A$, pois, contando as arestas que incidem em cada vértice, teremos contado cada uma duas vezes. Entretanto, se P possui algum vértice onde incidem mais de 3 arestas, teremos $3V < 2A$.

É portanto condição necessária que $3V \leq 2A$. (2)

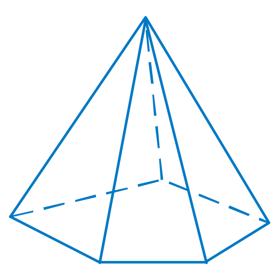
Se P é convexo, então $V - A + F = 2$ ou $6 = 3V - 3A + 3F$ e, usando (1), obtemos $6 = 3V - 3A + 3F \leq 3V - 3A + 2A = -A + 3V$, ou seja, $A + 6 \leq 3V$. Usando (2), obtemos $A + 6 \leq 3F$.

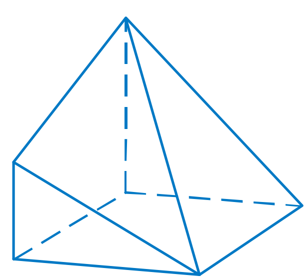
Portanto, para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, é necessário que, além da relação de Euler, e de que $A \geq 6$, tenhamos: $A + 6 \leq 3F \leq 2A$ e $A + 6 \leq 3V \leq 2A$.

Se o número de arestas é pequeno, podemos facilmente investigar o aspecto de alguns poliedros. Por exemplo: Como são os poliedros que possuem 10 arestas?

Considerando as condições que acabamos de estabelecer, se $A = 10$, devemos ter $16 \leq 3F \leq 20$ e $16 \leq 3V \leq 20$.

Logo, $F = 6$ e $V = 6$. Veja como eles são:





O primeiro é uma pirâmide pentagonal e o segundo possui duas faces quadrangulares e quatro faces triangulares.

Observe que não podemos construir um poliedro, com as características estabelecidas, somente com faces triangulares. Como vimos antes, se um poliedro possui apenas faces triangulares, então $3F = 2A$, o que não ocorre aqui.

Vamos prosseguir para encontrar **condições suficientes** para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces.

Representaremos por (V, A, F) qualquer um dos poliedros da família de todos os poliedros que possuem V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $(6, 10, 6)$ representa qualquer um dos dois poliedros que estão ilustrados na figura anterior.

Teorema

Existe um poliedro convexo com V *vértices,* A *arestas e* F *faces se, e somente se*:

i) $A \geq 6$

ii) $V - A + F = 2$

iii) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$

iv) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

Prova: Inicialmente observamos que as condições i) e iv) podem ser obtidas de ii) e iii); logo, não seria necessário escrevê-las, mas optamos por fazê-lo para maior clareza.

Já vimos que as condições são necessárias. Vamos então provar a suficiência.

a) Inicialmente, definimos os poliedros (famílias) que chamaremos de primitivos. São os seguintes:

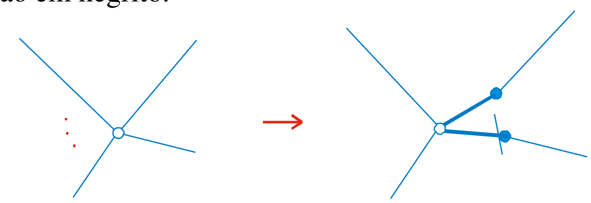
   (4, 6, 4): o tetraedro,

   (5, 8, 5): a pirâmide de base quadrangular,

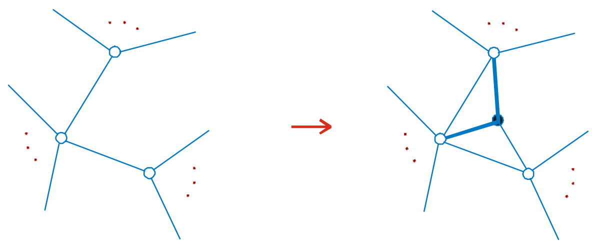
   (6, 10, 6): os poliedros que ilustramos na página anterior.

b) Vamos agora definir duas transformações a serem aplicadas nos poliedros primitivos:

   A transformação denotada por (2, 3, 1) acrescenta a um poliedro dois vértices, três arestas e uma face. Ela é realizada ajustando as arestas que incidem em um vértice, acrescentando uma nova face triangular como mostra a figura a seguir. As arestas e os vértices novos estão em negrito.



A transformação denotada por (1, 3, 2) acrescenta a um poliedro um vértice, três arestas e duas faces. Ela é realizada, introduzindo duas faces triangulares novas a partir de duas arestas adjacentes de uma face do poliedro. As arestas novas e o vértice novo estão em negrito.



A idéia dessas transformações deve-se a *Edward Bender*, da Universidade da Califórnia, que as publicou no artigo "The number of three dimensional convex polyhedra", da *American Mathematical Monthly*, volume 94, January, 1987. Washington, D.C.

Os poliedros primitivos satisfazem as condições i) a iv) e, aplicando-se a eles qualquer número de transformações (1, 3, 2) ou (2, 3, 1), continuamos obtendo poliedros que satisfazem essas condições. Por exemplo, se aplicarmos x vezes a transformação (1, 3, 2) ao poliedro (4, 6, 4), obtemos o poliedro $(4+x, 6+3x, 4+2x)$,

que claramente satisfaz a condição i);

satisfaz ii), pois $4 + x - 6 - 3x + 4 + 2x = 2$;

satisfaz iii), pois $6+3x+6 \leq 3(4+2x) \leq 2(6+3x)$;

satisfaz iv), pois $6+3x+6 \leq 3(4+x) \leq 2(6+3x)$.

Um trabalho análogo mostra que os três poliedros primitivos submetidos às transformações (1, 3, 2) e (2, 3, 1) conservam as condições i) a iv).

A parte final vem a seguir, onde mostraremos que se V, A, e F satisfazem as condições i) a iv), existe um poliedro com esses números de vértices, arestas e faces.

c) Dado (V, A, F), satisfazendo i) a iv), existem inteiros não negativos x e y e existe um poliedro primitivo (V', A', F') tais que

$(V, A, F) = (V', A', F') + x\,(1,3,2) + y\,(2,3,1)$, ou seja, (V, A, F) pode ser *construído* a partir de um dos poliedros primitivos.

Para provar isso, observe inicialmente o número de arestas dos poliedros primitivos. No primeiro, o número de arestas é múltiplo de 3, no segundo, deixa resto 2 quando dividido por 3 e, no terceiro, deixa resto 1 quando dividido por 3. Veja também que, para quaisquer x e y, o número A permanece inalterado (módulo 3), ou seja, seu resto na divisão por 3 permanece o mesmo.

Suponhamos que $A \equiv 0 \pmod 3$, ou seja, A é divisível por 3.

Nesse caso, mostraremos que existem inteiros não negativos x e y tais que

$$(V, A, F) = (4,6,4) + x\,(1,3,2) + y\,(2,3,1),$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} V = 4 + x + 2y \\ A = 6 + 3x + 3y \\ F = 4 + 2x + y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = V - 4 \\ 3(x+y) = A - 6 \\ 2x + y = F - 4 \end{cases}$$

Se x e y satisfazem a primeira e a terceira equações, então também satisfazem a segunda, uma vez que somando a primeira e a terceira equações obtemos, usando a relação de Euler,

$3\,(x+y) = V + F - 8 = A + 2 - 8 = A - 6$

Devemos ainda mostrar que as soluções x e y do sistema

$\begin{cases} x + 2y = V - 4 \\ 2x + y = F - 4 \end{cases}$ são números inteiros positivos.

Resolvendo, obtemos $x = \dfrac{2F - V - 4}{3}$ e $y = \dfrac{2V - F - 4}{3}$.

Vamos provar que x é inteiro:

Como estamos no caso $A \equiv 0 \pmod 3$, temos $A + 2 \equiv 2 \pmod 3$ ou $2(A + 2) \equiv 1 \pmod 3$.

Como $3V \equiv 0 \pmod 3$ e $4 \equiv 1 \pmod 3$, temos

$2F - V - 4 = 2F + 2V - 3V - 4 = 2(A+2) - 3V - 4 \equiv 1 + 0 - 1 = 0 \pmod 3$.

Assim, $2F - V - 4$ é divisível por 3, o que mostra que x é inteiro.

Da mesma forma, mostra-se que y é inteiro.

Com procedimento análogo mostra-se que, se $A \equiv 1 \pmod 3$, conseguimos encontrar x e y inteiros tais que:

$$(V, A, F) = (6, 10, 6) + x\,(1, 3, 2) + y\,(2, 3, 1)$$

e que, se $A \equiv 2 \pmod 3$, conseguimos encontrar x e y inteiros positivos tais que

$$(V, A, F) = (5, 8, 5) + x\,(1, 3, 2) + y\,(2, 3, 1).$$

Para mostrar que $x = \dfrac{2F - V - 4}{3}$ e $y = \dfrac{2V - F - 4}{3}$ não são negativos, veja que $2F - V - 4 = 2F - (A - F + 2) - 4 = 3F - (A + 6) \geq 0$. A primeira igualdade decorre da relação de Euler e a segunda da hipótese iii). Portanto, x não é negativo e, da mesma forma, mostra-se que y também não é negativo, completando a demonstração.

NOTA DA RPM: A idéia deste artigo foi inicialmente apresentada pela professora ***Silvana L. Vincenzi Bortolotti*** – CEFET – Medianeira – PR, que enviou à **RPM** uma proposta de artigo tratando do assunto. Agradecemos a ela o interesse pela **RPM** e por ter chamado nossa atenção sobre o tema.

Apêndice

O que significa a palavra *poliedro* neste artigo

Poliedro pode ser definido com diferentes níveis de generalidade. Como estamos interessados aqui na relação de Euler, vamos inicialmente definir poliedros convexos, para os quais a relação vale.

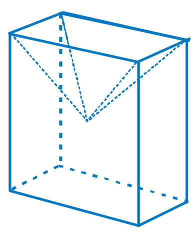
Um poliedro convexo é uma reunião de um número finito de polígonos planos de modo que:

a) Cada lado de um polígono é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

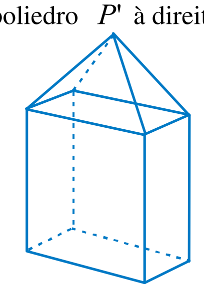
b) O plano que contém um desses polígonos deixa todos os outros em um mesmo lado.

Cada polígono é denominado *face* do poliedro, cada lado comum a dois desses polígonos é uma *aresta* do poliedro e cada vértice de um desses polígonos é também *vértice* do poliedro.

É verdade que todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas é fácil achar exemplos de poliedros não convexos para os quais ela ainda vale, como o poliedro P, na figura a seguir. Observe agora o poliedro P' à direita.



Poliedro P



Poliedro P'

Diremos que os poliedros P e P' são *equivalentes*. O poliedro P não é convexo, mas P' é convexo. A idéia que vem a seguir é a de transformar um poliedro em outro, de forma suave. A definição (nada formal) é a seguinte:

Dois poliedros são equivalentes se existe uma deformação contínua que transforma qualquer um deles no outro.

No caso dos poliedros P e P' acima, a deformação consiste em "puxar" o vértice da pirâmide interior para fora.

Com essa ferramenta, podemos modificar a forma de um poliedro como se ele fosse de borracha, sem nos preocuparmos se as faces são planas ou se as arestas são retas.

Em todo o artigo, a palavra *poliedro* designa um objeto que é equivalente a um poliedro convexo. Isso permite ler a demonstração sem a preocupação da convexidade a cada instante.

Para saber mais

No livro *Meu professor de Matemática*, do prof. Elon Lages Lima, o leitor encontrará material interessantíssimo sobre poliedros, sua história, a dificuldade em conseguir uma definição e duas demonstrações do teorema de Euler.

Referência bibliográfica: BENDER, E. A. *The number of three dimensional convex polyhedra*. The American Mathematical Monthly, volume 94, number 1, January, 1987. Washington, D.C.