

História do problema das quatro cores

Milene Maria Drumond Pimenta*

milene@lante.uff.br

Resumo

O Problema das Quatro Cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era esse número mínimo. Somente após mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que realmente a conjectura estava certa, obtendo-se o chamado Teorema das Quatro Cores. Neste trabalho, começa-se por fazer uma apresentação do problema, dá-se uma breve história dos seus desenvolvimentos. Depois são lembrados alguns conceitos e propriedades sobre grafos e mostra-se como a Teoria dos Grafos relaciona-se com o Problema das Quatro Cores.

Palavras-chave: Grafos. Coloração. Aplicação e educação.

History of the four-color problem

Abstract

The Four Color Problem deals with determining the minimum numbers of colors needed to color a map of real or imaginary countries, so that those with common borders have different colors. In 1852, Francis Guthrie conjectured that this minimum number was four. Only more than one hundred years later, in 1976, it was actually possible to prove that Guthrie's conjecture was correct, resulting in the so-called Four Color Theorem. This work starts by making a presentation of the problem and a brief history of its development. Some concepts and properties of graph theory are also presented, as well as how Graph Theory is related to the Four Color Problem.

Key words: *Graphs. Coloring. Application and education.*

A história do problema das quatro cores começou em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos do mapa de Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Depois de ter refletido sobre o problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie, que foi advogado, botânico e, sobretudo, matemático, tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan (o De Morgan das conhecidas leis de De Morgan, na Lógica). Em 23 de Outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura do seu

* Doutora em Engenharia de Produção (COPPE/UFRJ), professora da UFF

irmão mais velho ao professor de De Morgan. Este ficou muito entusiasmado e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton na qual explicava o problema. Esta carta foi conservada e encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em Dublin. Contrastando com a animação de De Morgan, Hamilton não achou o problema interessante.

Respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não tencionava debruçar-se sobre a questão.

Nos tempos que se seguiram, foi sobretudo por meio de De Morgan que a comunidade científica tomou conhecimento da Conjectura das Quatro Cores. De Morgan escreveu cartas para outros matemáticos conhecidos; o problema foi discutido e teve alguns desenvolvimentos. Por exemplo, De Morgan ocupou-se durante certo tempo com a questão de saber se quando 4 países têm dois a dois fronteiras comuns, um deles tem de estar dentro dos outros três.

Depois de 1860, por mais ou menos 20 anos, o interesse dos matemáticos pelo Problema das Quatro Cores esmoreceu. Pelo menos, não aparece discutido na literatura matemática desse tempo. Mas não foi esquecido. Com efeito, em 13 de Julho de 1878, Arthur Cayley indagava na seção de Matemática da Royal Society se porventura alguém já submetera uma solução da Conjectura das Quatro Cores. O próprio Cayley publicou uma pequena análise do problema nos *Proceedings of the Royal Geographical Society*, em 1879. Caley era um advogado brilhante, mas aproveitava todo o tempo que podia para a Matemática. Entre outras áreas, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria Algébrica.

Em 1879, Alfred Bray Kempe, que era também um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge, onde fora aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no *American Journal of Mathematics*. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome e alguns deles fizeram sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores.

Mas, em 1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro. No mesmo artigo, Heawood lamentava não ter sido capaz de obter nenhuma demonstração alternativa do teorema. Conseguiu, no entanto, dar mais um passo positivo; nomeadamente, provou o Teorema das Cinco Cores. Isto é, demonstrou que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa plano onde países de fronteira comum têm cores diferentes. Heawood estudou também a questão do número de cores necessárias para colorir mapas sobre vários tipos de superfícies fechadas, para além da esfera, as chamadas superfícies esféricas com "asas". Estas questões também já tinham sido abordadas por Kempe. Heawood deu uma contribuição relevante no estudo destes problemas. E, surpreendentemente, eles foram resolvidos antes do Problema das Quatro Cores.

Contribuições de vulto nestes assuntos foram dadas por Gerhard Ringel e J.W.T. Youngs e também por Jean Mayer.

Durante 124 anos, muitos métodos foram desenvolvidos para atacar o Problema das Quatro Cores. O livro de Ore de 1967 dá uma panorâmica bastante completa do muito que se produziu, até a data, em Teoria de Grafos para abordar o Problema, bem como de vários outros problemas que foram sendo solucionados nesse percurso.

Finalmente, em 1976, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser

verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia, a validade da demonstração é aceita na comunidade matemática, mas continua a ser polêmica.

Nunca é demais lembrar que muitos foram os matemáticos que contribuíram com o seu trabalho para o feliz desfecho de 1976. Para além dos nomes já referidos e de muitos outros que não cabem aqui enumerar, assinala-se o fato de Birkhoff e Heesch terem contribuído com ideias que foram cruciais na obtenção da prova de Appel e Haken. O nome de John Koch está também ligado a esta memorável descoberta, tendo trabalhado com Appel e Haken nos programas computacionais que levaram à solução do Problema das Quatro Cores.

Mas a história do Teorema das Quatro Cores não acaba aqui. A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Appel e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Eles também não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável. Aqueles que possuem os programas ao seu dispor e que tenham compreendido os fundamentos teóricos, poderão, em menos de um dia, reproduzir a demonstração. A questão de construir uma demonstração que não necessite o auxílio de computadores continua em aberto!

Referências

APPEL, K. ; HAKEN W. *Every planar map is four colorable*. Part I. Discharging, Illinois J. Math., vol. 21, 1977, 429-490.

APPEL, K. ; HAKEN W.; KOCH J. *Every planar map is four colorable*. Part II.Reducibility, Illinois J. Math., vol. 21, 1977, 491-567.

BARNETTE, D. *Map coloring, polyhedra, and the four color problem*. The Dolciani Mathematical Expositions 8, 1983.

FRITSCH, R.; FRITSCH, G., *The four color theorem: history, topological foundations, and the idea of proof*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

GUZMAN, M. de. *Contos com contos*. Lisboa: Gradiva 1991.

ORE, O. *The four-color problem*. New York: Academic Press, 1967.

RINGEL, G. *Map color theorem*. Berlin/Heidelberg/New York:Springer-Verlag, 1974.

ROBERTSON, N.; SANDERS, D.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R., *A new proof of the Four-Colour Theorem*, Electronic Research announcements of the Am. Math. Soc., Vol. 2, Number 1, 1996.