## Lista de exercícios número 6

**1)** Dois conjuntos não vazios A e B são ditos ***equipotentes*** quando existe uma bijeção $f : A \to B$.

Mostre, em cada caso, que os conjuntos A e B são equipotentes:

**a)** A= $\mathbb{N}$ e B=$\mathbb{N}^*$ **b)** A= ]-1,1[ e B= ]a,b[ , onde a e b são números reais tais que $a < b$.

**2)** Sejam ***a, b, c*** $\in \mathbb{R}$ , ***a*** $\neq 0$.

Qual o contradomínio **B** da função $f : \mathbb{R} \to$ **B** dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ , de modo que $f$ seja sobrejetora?

**3)** Sejam **a , b** $\in \mathbb{R}$ , **a** $\neq 0$, e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ . Prove que $f$ é bijetora.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada:

- função par se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- função ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A paridade das funções é uma propriedade interessante e muito utilizada na construção de gráficos, de maneira geral no Cálculo Diferencial e Integral, em Séries de Fourier, entre outros.

**4)** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ , e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Uma função desse tipo é chamada função quadrática).

Determine condições sobre $a, b, c$ de modo que $f$ seja par.

Solução:

Para que $f$ seja uma função par é necessário que $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ou seja:

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$-bx = bx, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$-2bx = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, para que $f$ seja uma função par é necessário que $b = 0$.

**5)** Mostre que nenhuma função quadrática pode ser uma função ímpar.

Solução:

Se $f$ fosse uma função ímpar teríamos $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = -\left(ax^2 + bx + c\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$2ax^2 + 2c = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$ax^2 + c = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Como a igualdade $(*)$ deve ser satisfeita para todo x real, em particular, ela deve ser satisfeita para $x=0$. Nesse caso tem-se:

$$a(0)^2+c=0\Rightarrow c=0,$$

e, substituindo $c=0$ em $(*)$ obtém-se:

$$ax^2=0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

donde $a=0$, o que contraria a condição $a\neq 0$ que é necessária para que $f$ seja uma função quadrática.

Observação:

Após a obtenção da igualdade $(*)$, foi atribuído a $x$ um valor particular, no caso $x=0$. Entretanto, qualquer outro valor que se atribuísse a $x$, levaria à mesma conclusão. De fato, fazendo por exemplo $x=1$ em $(*)$, obtém-se:

$$a(1)^2+c=0\Rightarrow a=-c$$

Substituindo $a=-c$ em $(*)$ obtém-se:

$$-cx^2+c=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$c\left(1-x^2\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

donde se conclui que $c=0$ e, portanto, $a=0$.

**6)** Obtenha uma função que seja simultaneamente par e ímpar.

**7)** Toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é necessariamente par ou ímpar?

**8)** Mostre que:

**a)** A soma de funções pares é uma função par.

**b)** A soma de funções ímpares é uma função ímpar.

**c)** O produto de funções pares é uma função par.

**d)** O produto de funções ímpares é uma função par.

**e)** Toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pode ser escrita de forma única como soma de uma função par com uma função ímpar.

**9)** Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

**a)** A soma de funções injetoras é uma função injetora.

**b)** A soma de funções sobrejetoras é uma função sobrejetora.

**c)** O produto de funções injetoras é uma função injetora.

**d)** O produto de funções sobrejetoras é uma função sobrejetora.