GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR

1

CONJUNTOS FUNÇÕES

75 Exercícios resolvidos
326 Exercícios propostos — com resposta
272 Testes de Vestibulares — com resposta

3ª edição

ATUAL
EDITORA

CAPÍTULO X

FUNÇÃO COMPOSTA
FUNÇÃO INVERSA

I. FUNÇÃO COMPOSTA

207. Definição

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C; chama-se *função composta* de g e f à função h de A em C definida por

$$h(x) = g(f(x))$$

para todo x em A.

Indicaremos esta aplicação h por $g \circ f$ (lê-se: g composta com f ou g círculo f); portanto

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo x em A.

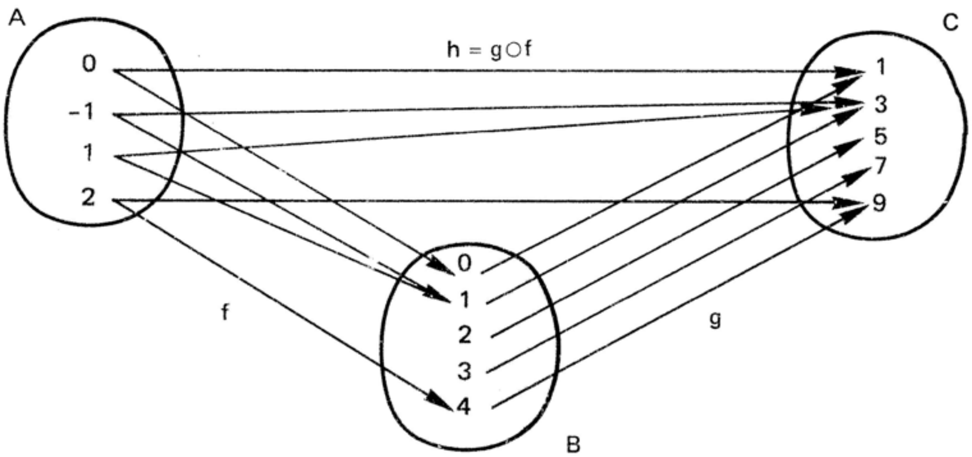
Podemos representar também a composta $g \circ f$ pelo diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

208. Exemplos

1º) Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções:

f, de A em B, definida por $f(x) = x^2$
g, de B em C, definida por $g(x) = 2x + 1$



observemos, por exemplo que: $f(2) = 4$, $g(4) = 9$ e $h(2) = 9$, isto é, $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta $h = g \circ f$, fazemos assim: $g(f(x))$ é obtida a partir de $g(x)$ trocando-se x por $f(x)$.

No exemplo dado, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

Se vamos calcular $h(2)$, fazemos deste modo:

$$h(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9.$$

2º) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

Notemos que a função composta $h_1 = g \circ f$ é definida por:

$$h_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

Notemos, por outro lado, que a função composta $h_2 = f \circ g$ é definida por:

$$h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + x + 1 + 1 = x^2 + x + 2.$$

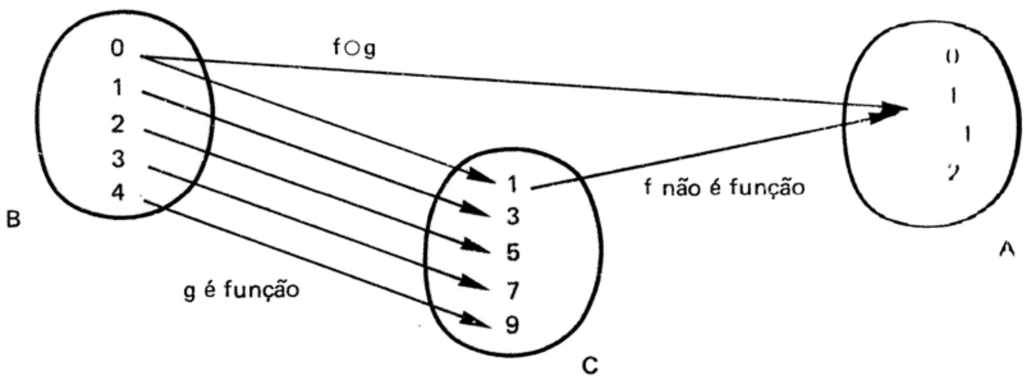
209. Observações

1ª) A composta $g \circ f$ só esta definida quando o contra-domínio da f é igual ao domínio da g. Em particular se as funções f e g são de A em A então as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas e são funções de A em A.

2ª) Notemos que em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Pode acontecer que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida.

Assim, no primeiro exemplo, se tentarmos obter $f \circ g$ verificaremos que é impossível, pois:
g é função de B em C mas f não é função de C em A.



3ª) As duas composições $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas mas $f \circ g \neq g \circ f$ como nos mostra o segundo exemplo:

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$$
$$(f \circ g)(x) = x^2 + x + 2.$$

210. Teorema

Quaisquer que sejam as funções

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

tem-se:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demonstração

Consideremos um elemento qualquer x de A e coloquemos $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$; temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(w) = z$$

então, temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo x de A.

EXERCÍCIOS

A.289 Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$. Pede-se:

a) obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$
b) calcular $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$
c) determinar os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de f, trocando-se x por g(x):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$
$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8.$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g, trocando-se x por f(x):

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$
$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

calculemos $g \circ f$ para $x = 2$

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

c) o problema em questão, resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \implies 4(x^2 - x - 6) = 0 \implies x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

A.290 Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$. Pede-se:

a) obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$
b) calcular $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$
c) determinar os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

A.291 Sejam as funções reais f e g. definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.292 Sejam as funções reias f e g, definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$. Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.293 Nas funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obter as leis que definem:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

A.294 Considere a função em IR definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Qual é a lei que define $f(-x)$? E $f(\frac{1}{x})$? E $f(x - 1)$?

A.295 Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determinar o valor de a de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

A.296 Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $f \circ g = g \circ f$.

A.297 Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que se $f \circ g = g \circ f$ então $f = g$.

A.298 Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determinar os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.
Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, isto é, $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 4$. Então
$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [g(x)]^2 - 3 \cdot g(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4$.
Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geqslant 0$. Então
$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

A.299 Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determinar os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.300 Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real. Pedem-se:

a) o domínio e a lei que define $f \circ g$
b) o domínio e a lei que define $g \circ f$.

A.301 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obter a lei que define $(h \circ g) \circ f$.

A.302 Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obter a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

A.303 Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determinar a lei da função g.

Solução

Se $f(x) = 3x - 5$ então trocando-se x por $g(x)$ temos:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$

mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$ então

$3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$

ou seja

$g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$.

A.304 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determinar a lei da função g.

A.305 Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determinar a lei da função f.

Solução

Se $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$ então $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 1$.

Como $g(x) = 3x - 2$, decorre $x = \dfrac{g(x) + 2}{3}$ e então:

$$f(g(x)) = 9\left[\frac{g(x) + 2}{3}\right]^2 - 3 \cdot \left[\frac{g(x) + 2}{3}\right] + 1 = [g(x)]^2 + 4g(x) + 4 - g(x) - 2 + 1 =$$

$= [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) + 3$ logo, $f(x) = x^2 + 3x + 3$.

A.306 Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determinar a lei da função f.

A.307 Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$ definida para todo x real e $x \neq 1$. Determinar a lei da função f.

A.308 Sejam f e g funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 3x + 4 & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3.$$

Obter a lei que define $f \circ g$.

Solução

Fazendo $g(x) = y$, temos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y)$.
Temos de examinar dois casos:

1º) $y \geqslant 1$

$y \geqslant 1 \iff g(x) \geqslant 1 \iff x - 3 \geqslant 1 \iff x \geqslant 4$

$y \geqslant 1 \implies f(y) = y^2 + 2y + 4 \implies f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) + 4 \implies$

$\implies (f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 2(x - 3) + 4 = x^2 - 4x + 7.$

2º) $y < 1$

$y < 1 \iff g(x) < 1 \iff x - 3 < 1 \iff x < 4$

$y < 1 \implies f(y) = 3y + 4 \implies f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 4 \implies$

$\implies (f \circ g)(x) = 3(x - 3) + 4 = 3x - 5$

Conclusão: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{se } x \geqslant 4 \\ 3x - 5, & \text{se } x < 4. \end{cases}$

A.309 Sejam f e g as funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geqslant 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 3.$$

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.310 Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

e $g(x) = 2 - 3x$.

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.311 Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \end{cases}$$

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.312 Sejam as funções reais g e $f \circ g$ definidas por $g(x) = 2x - 3$ e

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Obter a lei que define f.