elon lages lima

curso de análise volume 1

Décima Edição

impa
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

§3 Funções

Uma *função* $f\colon A \to B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x (ou no ponto x).

Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Muitas vezes se diz a "função f" em vez de "a função $f\colon A \to B$". Neste caso, ficam subentendidos o conjunto A, domínio de f, e o conjunto B, contradomínio de f.

Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1.ª Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in A$;

2.ª Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em B.

Vemos que não existem funções "plurívocas". Pela 2.ª condição, acima, se $x = y$ em A, então, $f(x) = f(y)$ em B.

Segue-se das considerações acima que duas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon A' \to B'$ são iguais se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

EXEMPLO 10. Sejam P o conjunto dos polígonos do plano, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f\colon P \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada polígono x sua área $f(x)$.

EXEMPLO 11. Sejam $A = B = \mathbb{Q}$. Tentemos definir uma função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, considerando a seguinte regra: a cada número $x \in \mathbb{Q}$, façamos corresponder o número $f(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot f(x) = 1$. Esta regra não define uma função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, pois, dado $0 \in \mathbb{Q}$, não existe número racional algum $y = f(0)$ tal que $0 \cdot y = 1$. Entretanto, se escolhermos o o conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$ para domínio, a mesma regra define a função $f\colon A \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 1/x$.

EXEMPLO 12. Sejam T o conjunto dos triângulos do plano e $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a tentativa de definir uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to T$ pela regra seguinte: cada número real $x > 0$ façamos corresponder o triângulo $f(x)$, ja área é x.

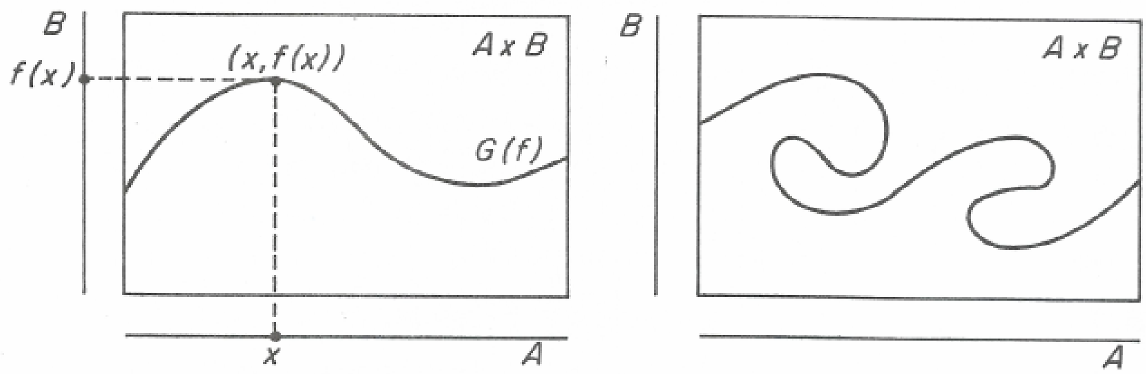
Evidentemente, há ambigüidades: dado um número real $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos cuja área é x. A regra não define uma função.

O *gráfico* de uma função $f: A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f: A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x. Para funções $f: A \to B$, onde A e B são conjuntos de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de A, deve cortar o gráfico G num e num só ponto.



Na figura à esquerda temos o gráfico de uma função $f: A \to B$. A figura à direita mostra um subconjunto de $A \times B$ que não pode ser gráfico de uma função de A em B.

Uma função $f: A \to B$ chama-se *injetiva* (ou *biunívoca*) quando, dados x, y quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$, em B.

O exemplo mais simples de uma função injetiva é a *inclusão* $i: A \to B$, definida quando A é um subconjunto de B, pela regra $i(x) = x$, para todo $x \in A$.

Uma função $f: A \to B$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobre* B) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplos de funções sobrejetivas são as *projeções* $\pi_1: A \times B \to A$ e $\pi_2: A \times B \to B$, de um produto cartesiano $A \times B$ nos fatores A e B, respectivamente. A *primeira projeção*, π_1, é definida por $\pi_1(a, b) = a$, enquanto a *segunda projeção*, π_2, é definida por $\pi_2(a, b) = b$.

EXEMPLO 13. Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$. Então f não é injetiva, pois $f(-3) = f(3)$, embora $-3 \neq 3$. Tampouco f é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -1$. Por outro lado, se tomarmos $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3x + 1$, então g é injetiva. De fato, se $g(x) = g(y)$ então $3x + 1 = 3y + 1$, ou seja, $3x = 3y$, donde $x = y$. Mas g não é sobrejetiva, pois não existe um inteiro x tal que $3x + 1 = 0$, por exemplo. Finalmente, seja $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida assim: $h(1) = 1$ e, para cada número natural $x > 1$, $h(x)$ é o número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Então h é sobrejetiva, pois $h(2) = 1$, $h(6) = 2$, $h(30) = 3$, $h(210) = 4$, etc. Mas é claro que h não é injetiva. Por exemplo, se x e y são dois números primos quaisquer, tem-se $h(x) = h(y)$.

EXEMPLO 14. A verificação de que uma função é sobrejetiva implica em demonstrar a *existência* de objetos satisfazendo certas condições. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2$. Dizer que f é sobrejetiva significa afirmar que, para todo número real $y > 0$ existe algum número real x tal que $y = x^2$, ou seja, que todo número real positivo y possui uma raiz quadrada x. (Isto será provado quando estudarmos os números reais.) Outro exemplo: seja p um polinômio não constante, de coeficientes complexos. A cada número complexo z associemos o valor $p(z)$ do polinômio p. Isto define uma função $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. A afirmação de que p é uma função sobrejetiva é equivalente ao chamado "Teorema Fundamental da Álgebra" (um teorema de Topologia, segundo o qual todo polinômio complexo não constante possui pelo menos uma raiz complexa). Com efeito, admitindo que $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva, dado $0 \in \mathbb{C}$, deve existir algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. O número z é, portanto, uma raiz de p. Reciprocamente, admitindo que todo polinômio não-constante possui uma raiz complexa, provamos que $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva. Com efeito, dado $c \in \mathbb{C}$, a função $z \mapsto p(z) - c$ é um polinômio não-constante, logo existe algum $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) - c = 0$. Tem-se $p(z_0) = c$, donde p é sobrejetiva.

Uma função $f: A \to B$ chama-se *bijetiva* (uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca*) quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

A mais simples das bijeções é a função *identidade* $\mathrm{id}_A: A \to A$, definida por $\mathrm{id}_A(x) = x$, para todo $x \in A$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $\mathrm{id}: A \to A$, em vez de id_A.

Por exemplo, dados arbitrariamente a, b em $\mathbb{Q}$, com $a \neq 0$, a função f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = ax + b$, é uma bijeção. Com efeito, se $f(x) = f(y)$, isto é, $ax + b = ay + b$ então, somando $-b$ a ambos os membros, vem $ax = ay$. Multiplicando ambos os membros por $1/a$, obtemos $x = y$. Assim, f é injetiva. Além disso, dado $y \in Q$ qualquer, o número racional $x = (y-b)/a$ é tal que $ax + b = y$, isto é, $f(x) = y$, donde f é sobrejetiva.

Dadas uma função f: $A \to B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se *imagem de X pela função f* ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in X$. Assim

$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\} = \{y \in B;\ y = f(x),\ x \in X\}.$$

Evidentemente, $f(X)$ é um subconjunto de B. Para que f: $A \to B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente que $f(A) = B$. Em geral, tem-se apenas $f(A) \subset B$. O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem da função f*. Às vezes também se diz que $f(A)$ é o *conjunto dos valores* de f.

Dada uma função f: $A \to B$ e indicando com $X, Y, \ldots$ subconjuntos de A, temos

I1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
I2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$,
I3) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$,
I4) $f(\varnothing) = \varnothing$.

Demonstremos as duas primeiras destas relações.

I1) Se $y \in f(X \cup Y)$, então existe $x \in X \cup Y$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in X$, temos $y \in f(X)$. Se, porém $x \in Y$, temos $y \in f(Y)$. Em qualquer caso, $y \in f(X) \cup f(Y)$. Logo $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Reciprocamente, seja $z \in f(X) \cup f(Y)$. Então $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$. No primeiro caso, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. No segundo, existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Em qualquer hipótese, existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Assim $z \in f(X \cup Y)$, isto é, $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Estas duas inclusões mostram que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

I2) Se $y \in f(X \cap Y)$ então existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$. Então $x \in X$ e portanto $y \in f(X)$. Também $x \in Y$ e portanto $y \in f(Y)$. Logo $y \in f(X) \cap f(Y)$.

EXEMPLO 15. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Definimos f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x^2$. Então a imagem de f, ou seja, o conjunto $f(\mathbb{R})$, é o conjunto dos números reais ≥ 0. (Aqui estamos fazendo uso do fato, a ser demonstrado mais adiante, de que todo número real positivo possui uma raiz quadrada).

EXEMPLO 16. Seja $f\colon A \to B$ uma função que não é injetiva. Então existem $x \neq y$ em A, com $f(x) = f(y)$. Ponhamos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. Tem-se $X \cap Y = \varnothing$, logo $f(X \cap Y) = \varnothing$. Entretanto $f(X) \cap \cap f(Y) = \{f(x)\}$ não é vazio. Logo, neste caso, temos $f(X \cap Y) \neq \neq f(X) \cap f(Y)$.

Se, porém, $f\colon A \to B$ for injetiva, podemos provar que $f(X \cap Y) = = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A.

Com efeito, dado $y \in f(X) \cap f(Y)$, temos $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$. Logo existem $x' \in X$ e $x'' \in Y$ com $y = f(x')$ e $y = f(x'')$. Como f é injetiva, deve ser $x' = x''$ e portanto $x' \in X \cap Y$. Segue-se que $y = f(x')$ pertence a $f(X \cap Y)$, o que mostra ser $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Como a inclusão oposta é sempre verdadeira, concluímos que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Em resumo, a fim de que se tenha $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A, é necessário e suficiente que a função $f\colon A \to B$ seja injetiva.

Dada uma função $f\colon A \to B$, consideremos um conjunto $Y \subset B$. A *imagem inversa de* Y pela função f é o conjunto $f^{-1}(Y)$, formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$. Assim:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}.$$

Note-se que pode ocorrer $f^{-1}(Y) = \varnothing$ mesmo que $Y \subset B$ seja um subconjunto não-vazio. Isto se dá precisamente quando $Y \cap f(A) = \varnothing$, isto é, quando Y não tem pontos em comum com a imagem de f. Em particular, f não é sobrejetiva. Dado $y \in B$, escrevemos $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$. Pode acontecer que $f^{-1}(y)$ possua mais de um elemento, pois f pode não ser injetiva.

EXEMPLO 17. Os subconjuntos do plano definidos em Geometria Analítica por meio de equações e desigualdades são imagens inversas de conjuntos. Por exemplo a reta que tem a equação $ax + by = c$ é o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by = c\}$. Consideremos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = ax + by$. Então a reta X é a imagem inversa do conjunto $\{c\}$ por f, ou seja, $X = f^{-1}(c)$. Também a circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 = 1$ (centro na origem e raio 1) é o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$. Tomemos a função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Temos $C = g^{-1}(1)$.

Agora consideremos o disco D de centro na origem e raio 1.

Temos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Seja g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ainda, a função definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Tomemos o intervalo $I = [0, 1] = \{t \in \mathbb{R};\ 0 \leq t \leq 1\}$. Então o disco D é a imagem inversa do intervalo I pela função g: $D = g^{-1}(I)$.

As imagens inversas se comportam bem relativamente às operações com conjuntos. Na relação abaixo, Y e Z indicam subconjuntos de B. Dada uma função f: $A \to B$, temos

$$
\begin{aligned}
&\text{Inv1)}\ f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z),\\
&\text{Inv2)}\ f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z),\\
&\text{Inv3)}\ f^{-1}(\complement\, Y) = \complement\, f^{-1}(Y),\\
&\text{Inv4)}\ Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z),\\
&\text{Inv5)}\ f^{-1}(B) = A,\\
&\text{Inv6)}\ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.
\end{aligned}
$$

Vamos demonstrar as três primeiras.

Inv1) Temos $x \in f^{-1}(Y \cup Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Z \Leftrightarrow f(x) \in Y$ ou $f(x) \in Z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$ ou $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.

Inv2) $x \in f^{-1}(Y \cap Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cap Z \Leftrightarrow f(x) \in Y$ e $f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$ e $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.

Inv3) $x \in f^{-1}(\complement\, Y) \Leftrightarrow f(x) \in \complement\, Y \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(Y)$.

§4 Composição de funções

Sejam f: $A \to B$ e g: $B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a *função composta* $g \circ f$: $A \to C$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

Dadas f: $A \to B$, g: $B \to C$ e h: $C \to D$, vale a lei associativa $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: $A \to D$. Com efeito, para todo $x \in A$, temos:

$$
\begin{aligned}
[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] = \\
= h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x).
\end{aligned}
$$

Observamos que, mais geralmente, basta que a imagem $f(A)$ da função f esteja contida no domínio de g para que a definição $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ faça sentido e forneça a função composta $g \circ f$: $A \to C$.

Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são injetivas então $g \circ f\colon A \to C$ é injetiva. Também a composta de funções sobrejetivas é sobrejetiva. Em particular, a composta de duas bijeções é uma bijeção. Estes fatos são de verificação imediata.

Por outro lado, qualquer função $f\colon A \to B$ pode ser escrita como composta $f = h \circ f_1$ de uma função injetiva h com uma função sobrejetiva. Basta considerar $f_1\colon A \to f(A)$, definida por $f_1(x) = f(x)$, e a inclusão $h\colon f(A) \to B$.

Também podemos escrever qualquer função $f\colon A \to B$ como composta $f = \pi \circ F$ de uma função sobrejetiva π com uma função injetiva F. Basta tomar $F\colon A \to A \times B$, onde $F(x) = (x, f(x))$ e $\pi\colon A \times B \to B$, com $\pi(x, y) = y$ (segunda projeção).

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções. Dado $X \subset A$, tem-se $(g \circ f)(X) = g(f(X))$. Se $Z \subset C$, temos $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Provemos esta última relação. Para $x \in A$, temos:

$$x \in f^{-1}(g^{-1}(Z)) \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(Z) \Leftrightarrow g(f(x)) \in Z \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in Z \Leftrightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(Z).$$

A *restrição* de uma função $f\colon A \to B$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|X\colon X \to B$, definida por $(f|X)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Considerando-se a inclusão $i\colon X \to A$, temos $f|X = f \circ i\colon X \to B$.

Dado $X \subset A$, se $g\colon X \to B$ é a restrição de uma função $f\colon A \to B$ ao conjunto X, diz-se também que f é uma *extensão* de g. *Estender* uma função $g\colon X \to B$ ao conjunto $A \supset X$ é, portanto, obter uma função $f\colon A \to B$ que coincida com g em X, isto é, tal que $f|X = g$. Evidentemente há, em geral, diversas extensões da mesma função g.

Um grande número de problemas matemáticos importantes se reduzem a estender uma ou várias funções de tal modo que as extensões satisfaçam a certas condições adicionais (continuidade, analiticidade, etc.). A função que se deseja estender é chamada a "condição de contorno".

Dadas as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$, diremos que g é uma *inversa à esquerda* para f quando $g \circ f = \mathrm{id}_A\colon A \to A$, ou seja, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.

Por exemplo, sejam A o conjunto dos números reais ≥ 0 e $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais. Consideremos $f\colon A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e $g\colon \mathbb{R} \to A$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$ se $y \geq 0$ e $g(y) = 0$ se $y < 0$. Para todo $x \in A$, temos $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$. Logo $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e, portanto, g é uma inversa à esquerda de f. Note-se que qualquer função $h\colon \mathbb{R} \to A$, tal que $h(y) = \sqrt{y}$ para $y \geq 0$, é uma inversa à esquerda de f. (A definição dos valores $h(y)$ para $y < 0$ pode ser qualquer, sem que fique afetada a igualdade $h \circ f = \mathrm{id}_A$).

Uma função f: $A \to B$ possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.

Demonstração. Se f é injetiva, para cada $y \in f(A)$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Escrevamos $x = g(y)$. Isto define uma função $g: f(A) \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Completamos a definição de g: $B \to A$ pondo, por exemplo, $g(y) = x_0$ (elemento que fixamos em A) para $y \in B - f(A)$. Obtemos g: $B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Reciprocamente, se existe g: $B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ então, dados x', x'' em A, $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = g(f(x')) = g(f(x'')) = x''$, e, portanto, f é injetiva.

Uma função g: $B \to A$ chama-se *inversa à direita* de uma função f: $A \to B$ quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$: $B \to B$, ou seja, quando $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Por exemplo, seja f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(1) = 1$ e, se $x > 1$, $f(x) =$ = número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Definamos g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $g(y) =$ menor número natural que é o produto de y fatores primos distintos. Então, para todo número natural y, temos $f(g(y)) = y$. Logo $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ e, portanto, g é uma inversa à direita para f. Outras funções h: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poderiam ser definidas com a propriedade $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Por exemplo, poderíamos por $h(y) =$ menor número natural divisível por 13 que é o produto de y fatores primos distintos.

Uma função f: $A \to B$ possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.

Demonstração. Seja f: $A \to B$ sobrejetiva. Então, para cada $y \in B$, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Escolhamos, para cada $y \in B$, um $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e ponhamos $g(y) = x$. Isto define uma função g: $B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$. Logo g é uma inversa à direita de f. Reciprocamente, se existe g: $B \to A$ com $f \circ g = \mathrm{id}_B$ então, para cada $y \in B$, pondo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo f é sobrejetiva.

Uma função g: $B \to A$ chama-se *inversa* da função f: $A \to B$ quando $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$, isto é, quando g é inversa à esquerda e à direita para f.

Por exemplo, seja a um número racional $\neq 0$ e definamos f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ pondo $f(x) = ax$. A função g: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $g(x) = \dfrac{x}{a}$, é inversa de f.

Outro exemplo: dada uma função arbitrária f: $A \to B$, seja $G(f)$ o gráfico de f. (Lembremos que $G(f)$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde x percorre A.) Definimos uma função $F: A \to G(f)$ pondo $F(x) = (x, f(x))$. Seja $\pi: G(f) \to A$ definida por $\pi(x, f(x)) = x$. (Evidentemente, $\pi = \pi_1 | G(f)$ é a restrição a $G(f)$ da primeira projeção $\pi_1: A \times B \to A$.) Então $F \circ \pi = \mathrm{id}_{G(f)}$ e $\pi \circ F = \mathrm{id}_A$, como se vê facilmente. Portanto π é inversa de F.

Segue-se das duas proposições anteriores que uma função $f: A \to B$ possui inversa se, e somente se, é uma bijeção.

Ao contrário das inversas de um só lado, se uma função $f: A \to B$ possui uma inversa, ela é única.

Com efeito suponhamos que $g: B \to A$ e $h: B \to A$ sejam ambas inversas de f. Então $h = h \circ \mathrm{id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{id}_A \circ g = g$.

O leitor atento terá notado que provamos acima um pouco mais do que enunciamos, a saber: se f possui uma inversa à esquerda, h, e uma inversa à direita, g, então $h = g$ e f tem uma inversa.

Escreveremos $f^{-1}: B \to A$ para indicar a inversa da bijeção $f: A \to B$.

Evidentemente, se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são bijeções, tem-se $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.