UM CURSO DE CÁLCULO

Vol. 1

HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI

Professor do Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo

4ª edição

LTC
EDITORA

2

FUNÇÕES

2.1. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

Entendemos por uma função f uma terna

$$(A,\ B,\ a \mapsto b)$$

onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a *cada* elemento a de A um *único* b de B. O conjunto A é o *domínio* de f e indica-se por D_f, assim $A = D_f$. O conjunto B é o *contradomínio* de f. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ (leia: f de a); diremos que $f(a)$ é o *valor que f assume* em a ou que $f(a)$ é o *valor que f associa* a a.

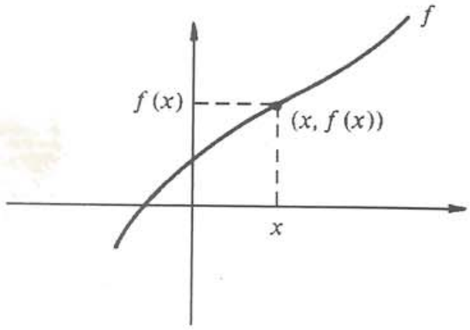
Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \mapsto B$ (leia: f de A em B).

Uma *função de uma variável real a valores reais* é uma função $f: A \mapsto B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.

Seja $f: A \mapsto B$ uma função. O conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

denomina-se *gráfico* de f; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.



Observação. Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a regra em questão.

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por

$$y = f(x), x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a *variável independente*, e y, a *variável dependente*. É usual, ainda, dizer que y é função de x.

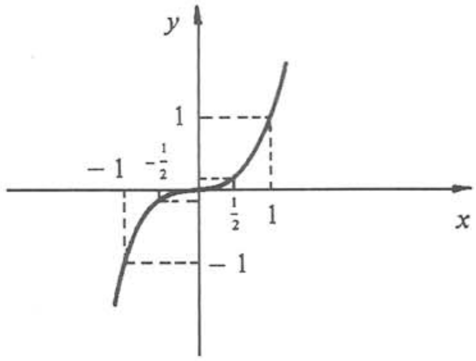
EXEMPLO 1. Seja $y = f(x), f(x) = x^3$. Tem-se:

a) $D_f = \mathbb{R}$.
b) O valor que f assume em x é $f(x) = x^3$. Esta função associa a cada real x o número real $f(x) = x^3$.
c) $f(-1) = (-1)^3 = -1; f(0) = 0^3 = 0; f(1) = 1^3 = 1$.
d) *Gráfico de f*

$$G_f = \{(x, y) \mid y = x^3, x \in \mathbb{R}\}$$

Suponhamos $x > 0$; observe que, à medida que x cresce, y também cresce, pois $y = x^3$, sendo o crescimento de y mais acentuado que o de x (veja: $2^3 = 8$; $3^3 = 27$ etc.); quando x se aproxima de zero, y se aproxima de zero *mais rapidamente* que x ($(1/2)^3 = 1/8$; $(1/3)^3 = 1/27$ etc.). Esta análise dá-nos uma idéia da parte do gráfico correspondente a $x > 0$. Para $x < 0$, é só observar que $f(-x) = -f(x)$.

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8



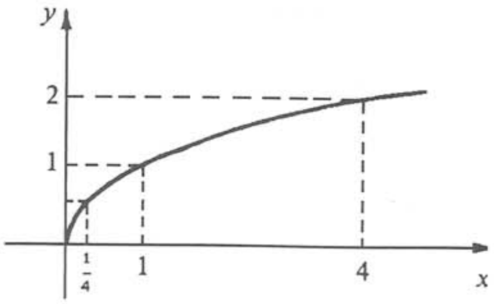
EXEMPLO 2. Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tem-se:

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
b) $f(4) = \sqrt{4} = 2$ (o valor que f assume em 4 é 2).
c) $f(t^2) = \sqrt{t^2} = |t|$.
d) $f(x+3) = \sqrt{x+3}$, $x \geqslant -3$.

e) Gráfico de f

A função f é dada pela regra $x \mapsto y$, $y = \sqrt{x}$. Quando x cresce, y também cresce, sendo o crescimento de y mais lento que o de x ($\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{64} = 8$ etc.); quando x se aproxima de zero, y também se aproxima de zero, só que mais lentamente que x ($\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ etc.).

x	$\sqrt{x}$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2



EXEMPLO 3. Considere a função g dada por $y = \dfrac{1}{x}$. Tem-se:

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

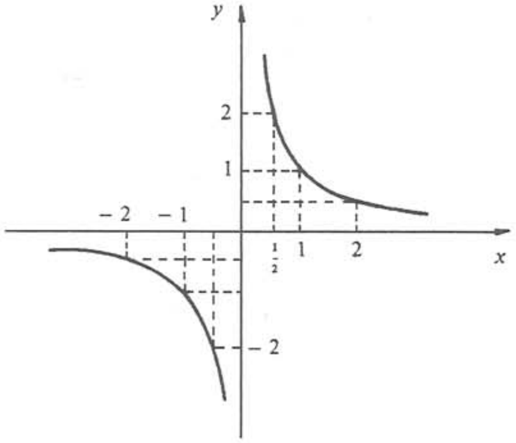
b) Esta função associa a cada $x \neq 0$ o real $g\,(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) $g\,(x + h) = \dfrac{1}{x + h}$, $x \neq -h$.

d) Gráfico de g

Vamos olhar primeiro para $x > 0$; à medida que x vai aumentando, $y = \dfrac{1}{x}$ vai se aproximando de zero ($x = 10 \mapsto y = \dfrac{1}{10}$; $x = 100 \mapsto y = \dfrac{1}{100}$ etc.); à medida que x vai se aproximando de zero, $y = \dfrac{1}{x}$ vai se tornando cada vez maior ($x = \dfrac{1}{2} \mapsto y = 2$; $x = \dfrac{1}{10} \mapsto y = 10$; $x = \dfrac{1}{100} \mapsto y = 100$ etc.). Você já deve ter uma idéia do que acontece para $x < 0$.

x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$



EXEMPLO 4. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x$, simplifique:

a) $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. *b*) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Solução

a) $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{(-x^2 + 2x) - 1}{x - 1} = \dfrac{-(x - 1)^2}{x - 1}$

assim

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -(x - 1),\ x \neq 1.$$

Observe: $f(1) = -1^2 + 2 = 1$.

b) Primeiro vamos calcular $f(x + h)$. Temos $f(x + h) = -(x + h)^2 + 2(x + h) = -x^2 - 2xh - h^2 + 2x + 2h$.

Então

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 2x + 2h - (-x^2 + 2x)}{h}$$

$$= \frac{-2xh - h^2 + 2h}{h}$$

$$= -2x - h + 2$$

ou seja,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -2x - h + 2,\ h \neq 0.$$

EXEMPLO 5. (*Função constante*). Uma função $y = f(x)$, $x \in A$, dada por $f(x) = k$, k constante, denomina-se *função constante.*

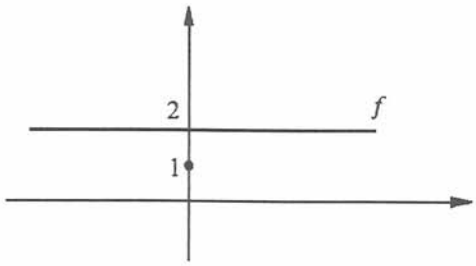
a) $f(x) = 2$ é uma função constante; tem-se:

(i) $D_f = \mathbb{R}$ (ii) *Gráfico de f*

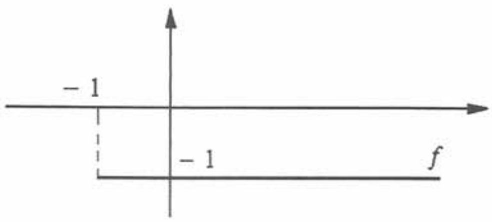
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

O gráfico de f é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto $(0, 2)$.

x	y
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2



b) $g : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -1$ é uma função constante e seu gráfico é

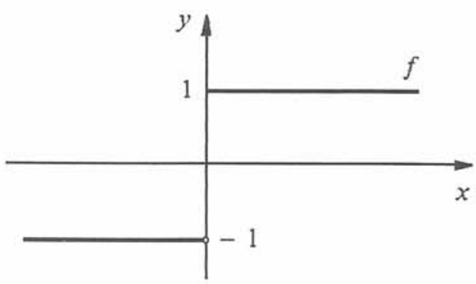


EXEMPLO 6. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Tem-se:

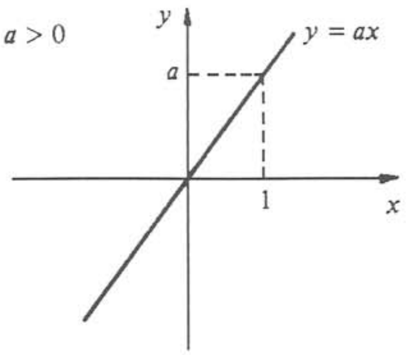
a) $D_f = \mathbb{R}$

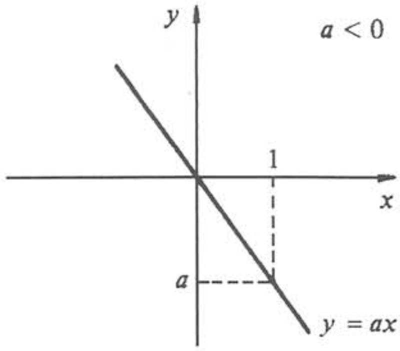
b) *Gráfico de f*



Observe que $(0, 1)$ pertence ao gráfico de f, mas $(0, -1)$ não.

EXEMPLO 7. (*Função linear*). Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, a constante, denomina-se *função linear*; seu gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$:





Se $a = 0$, o gráfico de f coincide com o eixo $0x$.

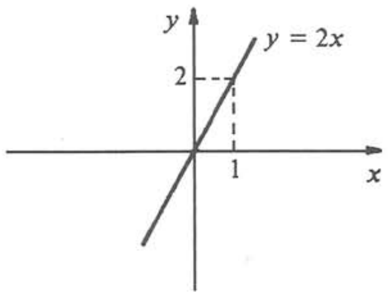
EXEMPLO 8. Esboce os gráficos.

a) $f(x) = 2x$. *b*) $g(x) = -2x$. *c*) $h(x) = 2|x|$.

Solução

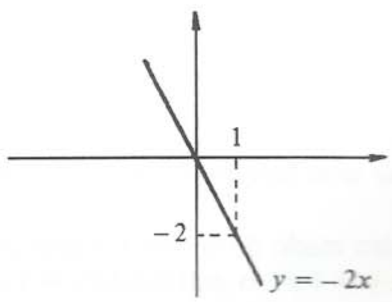
a) O gráfico de f é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$.

x	$y = f(x)$
0	0
1	2



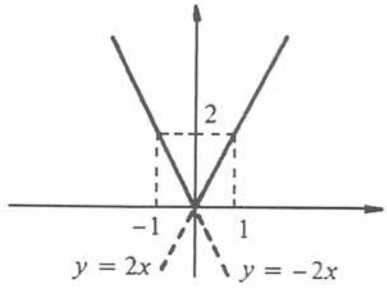
b) O gráfico de g é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, -2)$.

x	$y = g(x)$
0	0
1	-2



c) Primeiro eliminemos o módulo

$$h(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -2x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



EXEMPLO 9. (*Função afim*). Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, a e b constantes, denomina-se *função afim*. Seu gráfico é a reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e é paralela à reta $y = ax$.

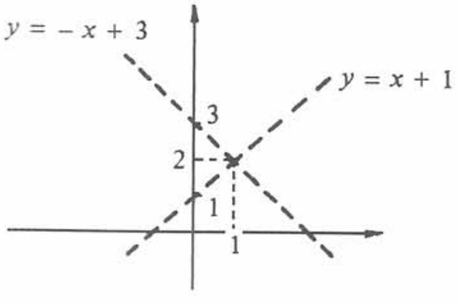
EXEMPLO 10. Esboce o gráfico de $f(x) = |x - 1| + 2$.

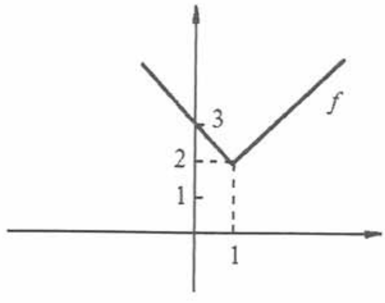
Solução

Primeiro eliminemos o módulo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -(x-1) + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x + 3 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Agora, vamos desenhar, pontilhadas, as retas $y = x + 1$ e $y = -x + 3$ e, em seguida, marcar, com traço firme, a parte que interessa de cada uma:

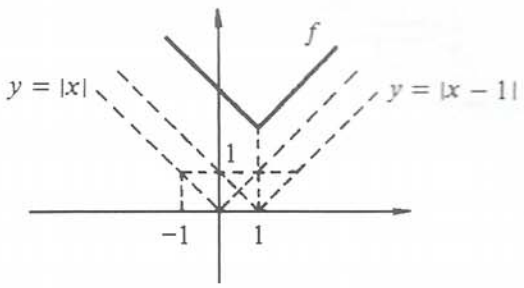




para $x \geqslant 1$, $f(x) = x + 1$
para $x < 1$, $f(x) = -x + 3$

Sempre que uma função for dada por várias sentenças, você poderá proceder desta forma.

Um outro modo de se obter o gráfico de f é o seguinte: primeiro desenhe pontilhado o gráfico de $y = |x|$; o gráfico de $y = |x - 1|$ obtém-se do anterior transladando-o para a direita de uma unidade; o gráfico de f obtém-se deste último transladando-o para cima de duas unidades.



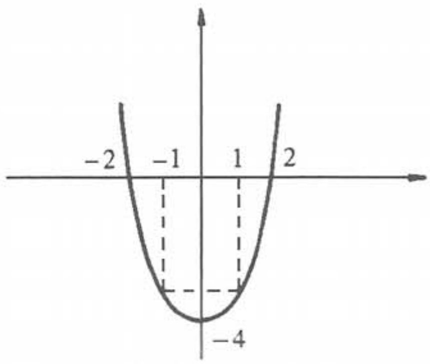
EXEMPLO 11. (*Função polinomial*). Uma função f: IR → IR dada por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

onde $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais fixos, denomina-se *função polinomial de grau* n ($n \in$ IN).

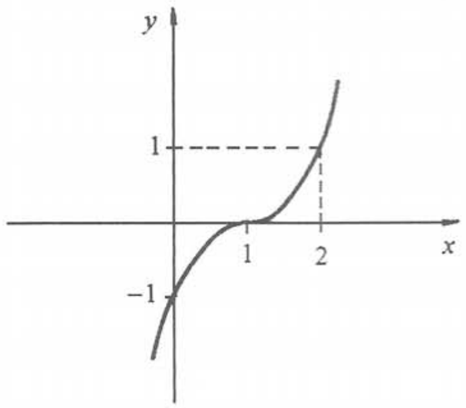
a) $f(x) = x^2 - 4$ é uma função polinomial de grau 2 e seu gráfico é a parábola

x	$f(x)$
2	0
−2	0
0	−4
1	−3
−1	−3

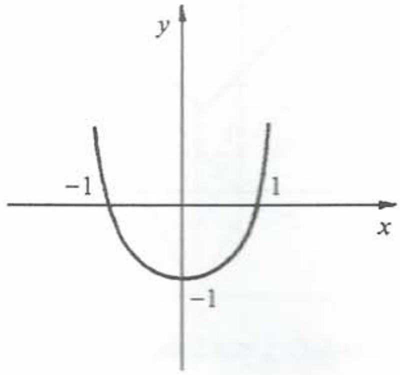


O gráfico de uma função polinomial de grau 2 é uma *parábola* com eixo de simetria paralelo ao eixo 0y.

b) $g(x) = (x-1)^3$ é uma função polinomial do grau 3; seu gráfico é obtido do gráfico de $y = x^3$, transladando-o uma unidade para a direita.



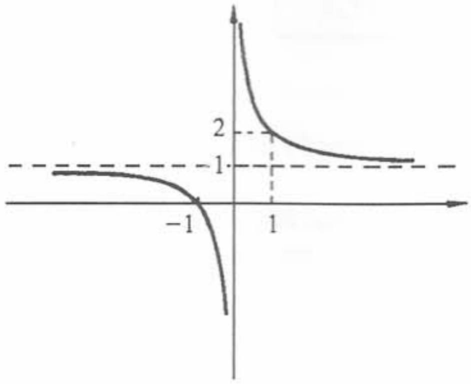
c) $f(x) = x^4 - 1$ é uma função polinomial do grau 4; seu gráfico tem o seguinte aspecto:



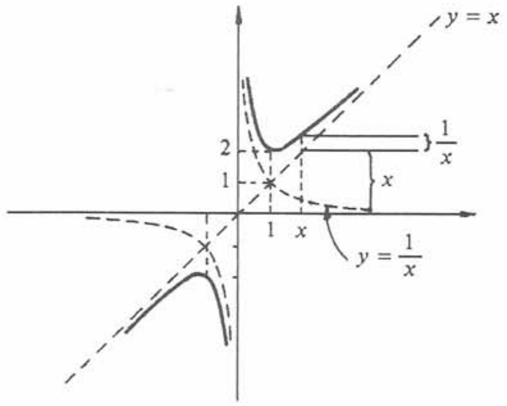
EXEMPLO 12. (*Função racional*). Uma *função racional* f é uma função dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde p e q são duas funções polinomiais; o domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ é uma função racional definida para todo $x \neq 0$. Como $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, segue que o gráfico de f é obtido do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$, transladando-o uma unidade para cima (veja Ex. 3).

x	$f(x)$
1	2
−1	0

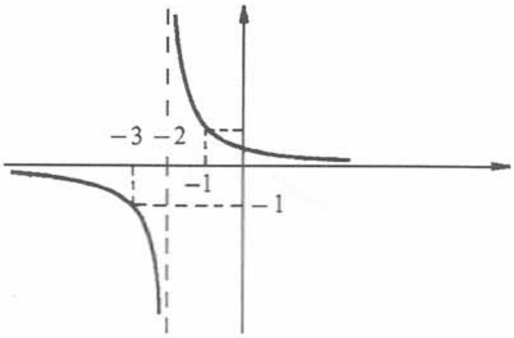


b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ é uma função racional com domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Observe que $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. À medida que $|x|$ vai crescendo, $\dfrac{1}{x}$ vai se aproximando de zero e o gráfico de g vai, então, "encostando" na reta $y = x$ (por cima se $x > 0$; por baixo se $x < 0$). À medida que x se aproxima de zero, o gráfico de g vai encostando na curva $y = \dfrac{1}{x}$.



c) $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ é uma função racional com domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$. O gráfico de h é obtido do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$, transladando-o duas unidades para a esquerda.

x	$h(x)$
0	$\frac{1}{2}$
-1	1
-3	-1



EXEMPLO 13. Determine A e B para que a terna $(A, B, x \mapsto y)$ seja função, sendo a regra $x \mapsto y$ dada *implicitamente* pela equação $xy^2 = x - 1$.

Solução

$$xy^2 = x - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Para se ter função, é preciso que a regra $x \mapsto y$ associe a *cada* $x \in A$ um único $y \in B$. Basta, então, tomar

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x} \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$$

e

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}.$$

Temos assim a função $f: A \to B$ dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Observação. A escolha de A e B acima não é a única possível. Quais as outras possibilidades?

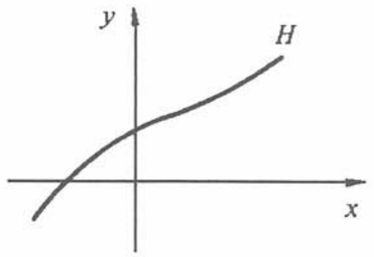
EXEMPLO 14. O conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$ é gráfico de função? Em caso afirmativo, descreva tal função.

Solução

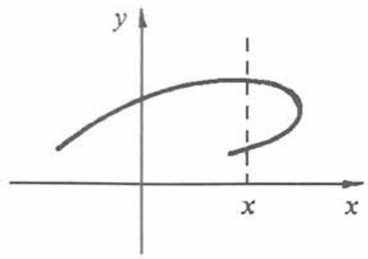
$2x + 3y = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1-2x}{3}$; segue que H é o gráfico da função dada por $y = \dfrac{1-2x}{3}$.

Notação. O símbolo $\mathbb{R}^2$ é usado para representar o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Observação. Sejam H um conjunto de pares ordenados e $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ com } (x, y) \in H\}$. Então H é gráfico de função se, e somente se, para cada x em A, existe um único y, com $(x, y) \in H$.



É gráfico de função

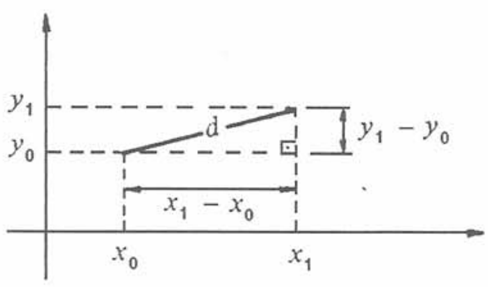


Não é gráfico de função.

Antes de passarmos ao próximo exemplo, lembramos que a *distância d* entre os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é definida por

$$\boxed{d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

Veja



pelo teorema de Pitágoras
$d^2 = (y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2$.

Pois bem, a *circunferência* de centro (a, b) e raio r $(r > 0)$ é, por definição, o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a (a, b) são iguais a r. Assim, a equação da circunferência de raio r e centro (a, b) é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

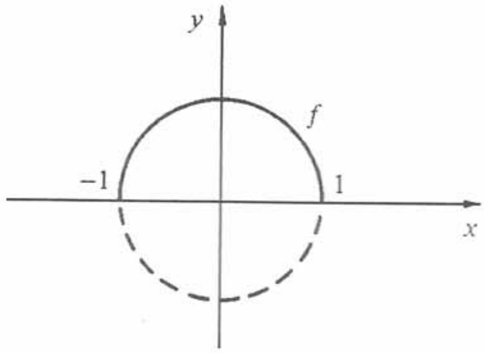
EXEMPLO 15. Esboce o gráfico da função f dada pela regra $x \mapsto y$, onde $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$.

Solução

$x^2 + y^2 = 1$ e $y \geqslant 0 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$. A função f é dada por

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \; -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Como $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$, segue-se que $x^2 + y^2 = 1$ é a equação da circunferência de centro na origem e raio 1; o gráfico de f é a parte desta circunferência correspondente a $y \geqslant 0$.



EXEMPLO 16. O conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y = 0\}$ é gráfico de função? Por quê?

Solução

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$ que é a equação da circunferência de centro (0, 1) e raio 1. Temos

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Assim, para cada $x \in \,]-1, 1[$ existe mais de um y, com $(x, y) \in H$; H não é gráfico de função.