

elon lages lima

**curso
de análise
volume 1**

Décima Edição

impa



INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

§3 Funções

Uma função $f: A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A , chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B , chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x (ou no ponto x).

Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Muitas vezes se diz a “função f ” em vez de “a função $f: A \rightarrow B$ ”. Neste caso, ficam subentendidos o conjunto A , domínio de f , e o conjunto B , contradomínio de f .

Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1.^a Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in A$;

2.^a Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em B .

Vemos que não existem funções “plurívocas”. Pela 2.^a condição, acima, se $x = y$ em A , então, $f(x) = f(y)$ em B .

Segue-se das considerações acima que duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: A' \rightarrow B'$ são iguais se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

EXEMPLO 10. Sejam P o conjunto dos polígonos do plano, \mathbb{R} o conjunto dos números reais e $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ a função que associa a cada polígono x sua área $f(x)$.

EXEMPLO 11. Sejam $A = B = \mathbb{Q}$. Tentemos definir uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, considerando a seguinte regra: a cada número $x \in \mathbb{Q}$, façamos corresponder o número $f(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot f(x) = 1$. Esta regra não define uma função de \mathbb{Q} em \mathbb{Q} , pois, dado $0 \in \mathbb{Q}$, não existe número racional algum $y = f(0)$ tal que $0 \cdot y = 1$. Entretanto, se escolhermos o conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$ para domínio, a mesma regra define a função $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 1/x$.

EXEMPLO 12. Sejam T o conjunto dos triângulos do plano e \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a tentativa de definir uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow T$ pela regra seguinte: cada número real $x > 0$ façamos corresponder o triângulo $f(x)$, cuja área é x .

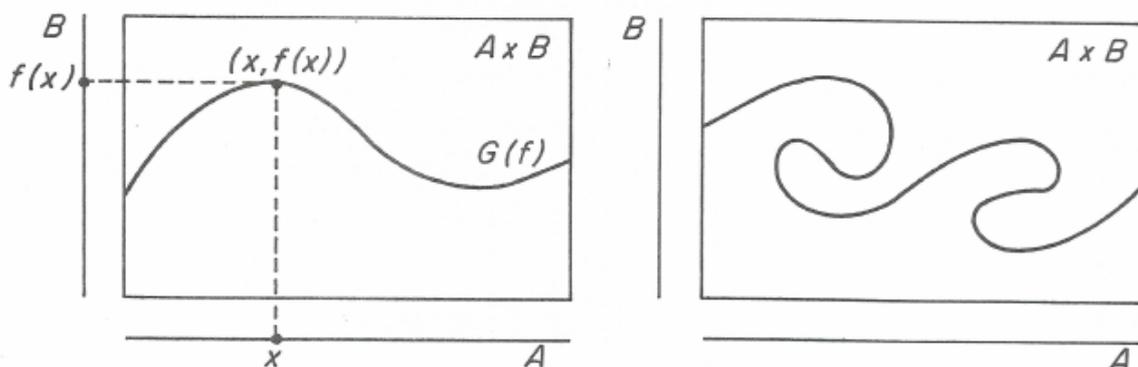
Evidentemente, há ambigüidades: dado um número real $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos cuja área é x . A regra não define uma função.

O gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}.$$

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x . Para funções $f: A \rightarrow B$, onde A e B são conjuntos de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de A , deve cortar o gráfico G num e num só ponto.



Na figura à esquerda temos o gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$. A figura à direita mostra um subconjunto de $A \times B$ que não pode ser gráfico de uma função de A em B .

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *injetiva* (ou *biunívoca*) quando, dados x, y quaisquer em A , $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em A , implica $f(x) \neq f(y)$, em B .

O exemplo mais simples de uma função injetiva é a *inclusão* $i: A \rightarrow B$, definida quando A é um subconjunto de B , pela regra $i(x) = x$, para todo $x \in A$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobre* B) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplos de funções sobrejetivas são as *projeções* $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ e $\pi_2: A \times B \rightarrow B$, de um produto cartesiano $A \times B$ nos fatores A e B ,

respectivamente. A *primeira projeção*, π_1 , é definida por $\pi_1(a, b) = a$, enquanto a *segunda projeção*, π_2 , é definida por $\pi_2(a, b) = b$.

EXEMPLO 13. Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$. Então f não é injetiva, pois $f(-3) = f(3)$, embora $-3 \neq 3$. Tampouco f é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -1$. Por outro lado, se tomarmos $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3x + 1$, então g é injetiva. De fato, se $g(x) = g(y)$ então $3x + 1 = 3y + 1$, ou seja, $3x = 3y$, donde $x = y$. Mas g não é sobrejetiva, pois não existe um inteiro x tal que $3x + 1 = 0$, por exemplo. Finalmente, seja $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida assim: $h(1) = 1$ e, para cada número natural $x > 1$, $h(x)$ é o número de fatores primos distintos que entram na composição de x . Então h é sobrejetiva, pois $h(2) = 1$, $h(6) = 2$, $h(30) = 3$, $h(210) = 4$, etc. Mas é claro que h não é injetiva. Por exemplo, se x e y são dois números primos quaisquer, tem-se $h(x) = h(y)$.

EXEMPLO 14. A verificação de que uma função é sobrejetiva implica em demonstrar a *existência* de objetos satisfazendo certas condições. Por exemplo, seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2$. Dizer que f é sobrejetiva significa afirmar que, para todo número real $y > 0$ existe algum número real x tal que $y = x^2$, ou seja, que todo número real positivo y possui uma raiz quadrada x . (Isto será provado quando estudarmos os números reais.) Outro exemplo: seja p um polinômio não constante, de coeficientes complexos. A cada número complexo z associemos o valor $p(z)$ do polinômio p . Isto define uma função $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. A afirmação de que p é uma função sobrejetiva é equivalente ao chamado “Teorema Fundamental da Álgebra” (um teorema de Topologia, segundo o qual todo polinômio complexo não constante possui pelo menos uma raiz complexa). Com efeito, admitindo que $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é sobrejetiva, dado $0 \in \mathbb{C}$, deve existir algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. O número z é, portanto, uma raiz de p . Reciprocamente, admitindo que todo polinômio não-constante possui uma raiz complexa, provamos que $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é sobrejetiva. Com efeito, dado $c \in \mathbb{C}$, a função $z \mapsto p(z) - c$ é um polinômio não-constante, logo existe algum $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) - c = 0$. Tem-se $p(z_0) = c$, donde p é sobrejetiva.

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *bijetiva* (uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca*) quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

A mais simples das bijeções é a função *identidade* $\text{id}_A: A \rightarrow A$, definida por $\text{id}_A(x) = x$, para todo $x \in A$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $\text{id}: A \rightarrow A$, em vez de id_A .

Por exemplo, dados arbitrariamente a, b em \mathbb{Q} , com $a \neq 0$, a função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = ax + b$, é uma bijeção. Com efeito, se $f(x) = f(y)$, isto é, $ax + b = ay + b$ então, somando $-b$ a ambos os membros, vem $ax = ay$. Multiplicando ambos os membros por $1/a$, obtemos $x = y$. Assim, f é injetiva. Além disso, dado $y \in \mathbb{Q}$ qualquer, o número racional $x = (y-b)/a$ é tal que $ax + b = y$, isto é, $f(x) = y$, donde f é sobrejetiva.

Dadas uma função $f: A \rightarrow B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se *imagem de X* pela função f ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in X$. Assim

$$f(X) = \{f(x); x \in X\} = \{y \in B; y = f(x), x \in X\}.$$

Evidentemente, $f(X)$ é um subconjunto de B . Para que $f: A \rightarrow B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente que $f(A) = B$. Em geral, tem-se apenas $f(A) \subset B$. O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem da função f*. Às vezes também se diz que $f(A)$ é o *conjunto dos valores de f*.

Dada uma função $f: A \rightarrow B$ e indicando com X, Y, \dots subconjuntos de A , temos

- I1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- I2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$,
- I3) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$,
- I4) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demonstremos as duas primeiras destas relações.

I1) Se $y \in f(X \cup Y)$, então existe $x \in X \cup Y$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in X$, temos $y \in f(X)$. Se, porém $x \in Y$, temos $y \in f(Y)$. Em qualquer caso, $y \in f(X) \cup f(Y)$. Logo $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Reciprocamente, seja $z \in f(X) \cup f(Y)$. Então $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$. No primeiro caso, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. No segundo, existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Em qualquer hipótese, existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Assim $z \in f(X \cup Y)$, isto é, $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Estas duas inclusões mostram que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

I2) Se $y \in f(X \cap Y)$ então existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$. Então $x \in X$ e portanto $y \in f(X)$. Também $x \in Y$ e portanto $y \in f(Y)$. Logo $y \in f(X) \cap f(Y)$.

EXEMPLO 15. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x^2$. Então a imagem de f , ou seja, o conjunto $f(\mathbb{R})$, é o conjunto dos números reais ≥ 0 . (Aqui estamos fazendo

uso do fato, a ser demonstrado mais adiante, de que todo número real positivo possui uma raiz quadrada).

EXEMPLO 16. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função que não é injetiva. Então existem $x \neq y$ em A , com $f(x) = f(y)$. Ponhamos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. Tem-se $X \cap Y = \emptyset$, logo $f(X \cap Y) = \emptyset$. Entretanto $f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$ não é vazio. Logo, neste caso, temos $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Se, porém, $f: A \rightarrow B$ for injetiva, podemos provar que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A .

Com efeito, dado $y \in f(X) \cap f(Y)$, temos $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$. Logo existem $x' \in X$ e $x'' \in Y$ com $y = f(x')$ e $y = f(x'')$. Como f é injetiva, deve ser $x' = x''$ e portanto $x' \in X \cap Y$. Segue-se que $y = f(x')$ pertence a $f(X \cap Y)$, o que mostra ser $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Como a inclusão oposta é sempre verdadeira, concluímos que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Em resumo, a fim de que se tenha $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A , é necessário e suficiente que a função $f: A \rightarrow B$ seja injetiva.

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, consideremos um conjunto $Y \subset B$. A *imagem inversa de Y* pela função f é o conjunto $f^{-1}(Y)$, formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$. Assim:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Note-se que pode ocorrer $f^{-1}(Y) = \emptyset$ mesmo que $Y \subset B$ seja um subconjunto não-vazio. Isto se dá precisamente quando $Y \cap f(A) = \emptyset$, isto é, quando Y não tem pontos em comum com a imagem de f . Em particular, f não é sobrejetiva. Dado $y \in B$, escrevemos $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$. Pode acontecer que $f^{-1}(y)$ possua mais de um elemento, pois f pode não ser injetiva.

EXEMPLO 17. Os subconjuntos do plano definidos em Geometria Analítica por meio de equações e desigualdades são imagens inversas de conjuntos. Por exemplo a reta que tem a equação $ax + by = c$ é o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by = c\}$. Consideremos a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = ax + by$. Então a reta X é a imagem inversa do conjunto $\{c\}$ por f , ou seja, $X = f^{-1}(c)$. Também a circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 = 1$ (centro na origem e raio 1) é o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Tomemos a função $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Temos $C = g^{-1}(1)$.

Agora consideremos o disco D de centro na origem e raio 1.

Temos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Seja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ainda, a função definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Tomemos o intervalo $I = [0, 1] = \{t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 1\}$. Então o disco D é a imagem inversa do intervalo I pela função g : $D = g^{-1}(I)$.

As imagens inversas se comportam bem relativamente às operações com conjuntos. Na relação abaixo, Y e Z indicam subconjuntos de B . Dada uma função $f: A \rightarrow B$, temos

$$\text{Inv1) } f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z),$$

$$\text{Inv2) } f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z),$$

$$\text{Inv3) } f^{-1}(\complement Y) = \complement f^{-1}(Y),$$

$$\text{Inv4) } Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z),$$

$$\text{Inv5) } f^{-1}(B) = A,$$

$$\text{Inv6) } f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Vamos demonstrar as três primeiras.

$$\begin{aligned} \text{Inv1) } & \text{Temos } x \in f^{-1}(Y \cup Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Z \Leftrightarrow f(x) \in Y \text{ ou } f(x) \in Z \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \text{ ou } x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Inv2) } & x \in f^{-1}(Y \cap Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cap Z \Leftrightarrow f(x) \in Y \text{ e } f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \\ & \text{e } x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z). \end{aligned}$$

$$\text{Inv3) } x \in f^{-1}(\complement Y) \Leftrightarrow f(x) \in \complement Y \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(Y).$$