

## LADRILHAMENTOS

*Elvia Mureb Sallum  
Matemateca-IME-USP*

A arte do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos. Ela existe desde que o homem começou a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de sua casa e continuou com a aplicação de cores, desenhos ou figuras para deixar os ladrilhos mais agradáveis. As mais antigas peças de ladrilhos conhecidas datam de 5000 anos a.C. e foram encontradas no Egito. Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e cenas naturais; mouros e árabes usavam figuras geométricas complexas e entrelaçadas, como se constata na Alhambra, um complexo de palácios de Granada (Espanha) construído, por mouros e cristãos, entre os séculos 13 e 15 e declarado, pela UNESCO, patrimônio da humanidade.

O estudo geométrico que apresentamos neste trabalho explica por que ladrilhamentos com motivos semelhantes apareceram em lugares distantes no tempo e no espaço. Apesar da arte ser bem antiga e bem desenvolvida, a ciência é recente, de aproximadamente 100 anos, tendo aspectos que ainda não foram desenvolvidos.

O homem usa essa técnica em uma grande variedade de aplicações: papel de parede, pisos decorativos com cerâmicas ou pedras, pisos e forros de madeira, estamparia de tecidos, malharias e crochês, no empacotamento ou empilhamento de objetos iguais, etc.

Na natureza são encontrados em células de tecidos biológicos, nas colméias, no arranjo das escamas de peixes, nas pinhas das coníferas, nos arranjos dos cristais, nas bolhas de sabão, nas trincas das cerâmicas, etc.

Veremos que há apenas 11 tipos de ladrilhamentos do plano euclidiano (*no plano hiperbólico há mais, vale a pena estudar!*), que usam apenas polígonos regulares e mantêm a mesma distribuição das peças nos vértices; é interessante observar que nenhum deles permite o uso de pentágonos regulares.

São possíveis ladrilhamentos com um único molde na forma de qualquer quadrilátero, de alguns tipos de pentágonos irregulares, etc.

Recentemente, em 1973-1974, o físico-matemático inglês Roger Penrose descobriu três conjuntos de mosaicos especiais, chamados *aperiódicos*, um deles com duas peças denominadas por papagaio e flecha. Em 1989 ele demonstrou que, sob certas regras simples de composição, esse conjunto cobre o plano de uma infinidade não enumerável de maneiras de modo que o ladrilhamento não é a repetição de nenhum padrão.

Mostraremos que existem apenas 11 tipos de mosaicos do plano que obedecem as seguintes condições:

- a) os ladrilhos são polígonos regulares
- b) a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice ou vazia
- c) o tipo de cada vértice é sempre o mesmo, isto é, a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Dentre esses, os mosaicos em que todos os ladrilhos são congruentes são chamados de *regulares*; os outros, que podem conter 2 ou 3 tipos de ladrilhos, são chamados de *quase regulares*. Mostraremos que existem, no plano euclidiano, apenas 3 tipos de mosaicos regulares e mais 8 tipos de quase regulares (Figura 6).

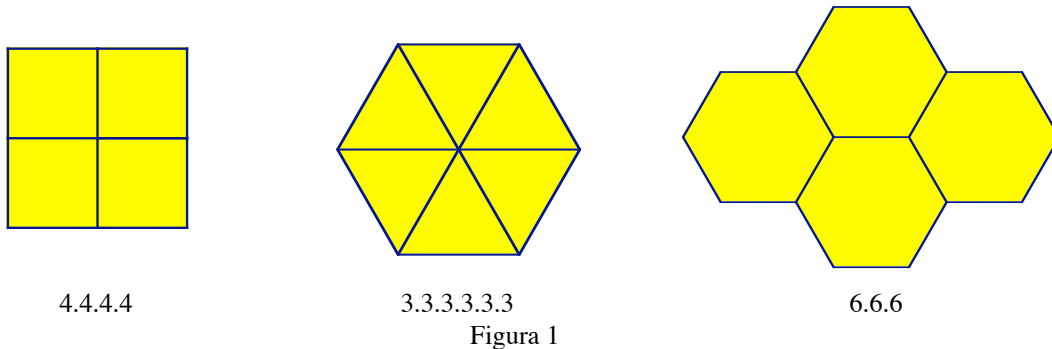
Veremos também alguns mosaicos determinados por polígonos regulares com distribuições diferentes nos vértices, isto é, que obedecem a) e b) mas não obedecem c) (Figura 7), mosaicos determinados por um quadrilátero qualquer e faremos algumas considerações sobre os mosaicos não periódicos de Penrose.

Vale a pena estudar os “ladrilhamentos” de Andreini, por poliedros, do espaço tri-dimensional.

### Mosaicos regulares

Mosaicos *regulares* são os que obedecem a), b) e c) de modo que os ladrilhos de cada mosaico sejam congruentes. Neste tipo de mosaico existem apenas três tipos possíveis de vértices, a saber:

- 6 triângulos equiláteros, que indicaremos por 3.3.3.3.3.3 ou  $3^6$
- 4 quadrados, 4.4.4.4 ou  $4^4$
- 3 hexágonos 6.6.6 ou  $6^3$



Um polígono regular de  $n$  lados tem ângulos internos iguais a  $180(1 - \frac{2}{n})$ . Então, para existir ladrilhamento regular com  $m$  polígonos regulares de  $n$  lados em cada vértice, devemos ter:  $m180(1 - \frac{2}{n}) = 360 \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2n}{n-2} \Leftrightarrow m-2 = \frac{4}{n-2}$ . Como  $m-2$  é inteiro, então,  $n-2$  é divisor de 4 e as únicas possibilidades são:

$m=n^\circ$ políg / vértice	$n=n^\circ$ lados do políg.
6	3
4	4
3	6

Tabela 1

### Mosaicos quase-regulares ou arquimedianos

Mais geralmente, consideraremos mosaicos quase-regulares, isto é, dados por a), b) e c) sendo os polígonos regulares não necessariamente congruentes. Veremos que existem 21 possibilidades para a distribuição de ladrilhos nos vértices (Tabelas 2, 3, 4 e 5 e Figura 4) mas apenas as indicadas com \* nas Tabelas citadas definem mosaicos (Figura 5).

Assim, teremos exatamente 11 tipos de mosaicos quase regulares sendo 3 do tipo regular. Todos eles são obtidos com 1, 2 ou, no máximo, 3 tipos de ladrilhos. Nem todos os polígonos regulares podem ser usados para fazer ladrilhamentos quase-regulares; assim, *pentágonos, heptágonos, eneágonos e decágonos regulares não compõem ladrilhamentos quase-regulares.*

Seja  $m$  o número de polígonos regulares incidindo em cada vértice temos  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ , em que  $m_i$  é o número de polígonos regulares, com ângulo interno igual a  $\alpha_i$ , em cada vértice e  $360 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_k\alpha_k \geq m \cdot 60$ , pois o ângulo interno de cada polígono é sempre maior ou igual a  $60^\circ$ . Logo  $3 \leq m \leq 6$ .

**Caso  $m=3$ :** (*três polígonos regulares em cada vértice*) Sendo,  $n_i$  o número de lados de cada um dos três polígonos incidindo num vértice, para cada  $i = 1, 2, 3$ , temos

$$\sum_{i=1}^3 \left(180 - \frac{360}{n_i}\right) = 360 \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Supondo  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$  temos  $3 \leq n_1 \leq 6$  (senão o lado esquerdo seria menor ou igual a  $3/7$ ).

Para  $n_1=3$ ,

Para  $n_1=4$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} \leq \frac{2}{n_2} \\ \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - 6}{n_2} \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \leq n_2 \leq 12$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} \leq \frac{2}{n_2} \\ \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - 4}{4n_2} \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \leq n_2 \leq 8$$

Para  $n_1=5$  temos  $5 \leq n_2 \leq 6$ ; e para  $n_1=6$  temos  $n_2=6$ .

Assim, abaixo temos as dez possíveis combinações de 3 ladrilhos regulares num vértice (ver Figura 5). Veremos, em seguida, que apenas as indicadas com \* definem mosaicos quase-regulares.

$m=3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
	3	7	42
	3	8	24
	3	9	18
	3	10	15
*	3	12	12
	4	5	20
*	4	6	12
*	4	8	8
	5	5	10
*	6	6	6

Tabela 2

Quando temos um triângulo,  $n_1=3$  e só é possível formar mosaico se os outros dois polígonos incidentes num vértice forem congruentes de 12 lados. De fato, é fácil ver, na Figura 1, à esquerda, que  $a=x$ ,  $b=y$ ,  $a=b$  e, portanto, o único caso possível para  $n_1 = 3$  é  $(3,12,12)$ , isto é,  $n_2 = n_3 = 12$ .

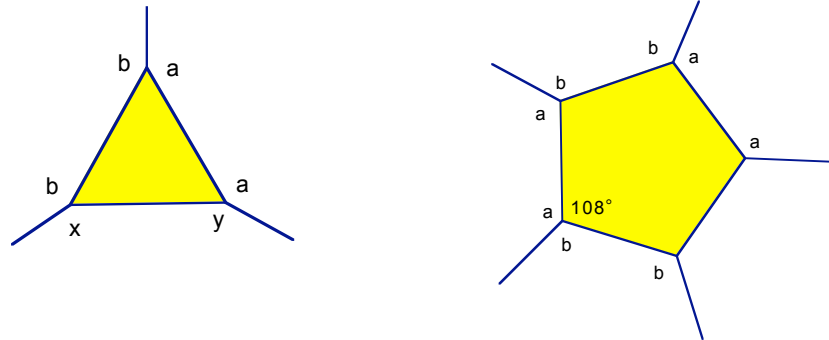


Figura 2

Se tivéssemos um pentágono,  $n_1=5$ , como no caso anterior, os outros dois polígonos regulares teriam que ser congruentes, como sugere a Figura 2, à direita e pela Tabela 2 podemos concluir que *não se tem mosaico com pentágonos regulares*.

Os tipos possíveis de mosaicos quase-regulares em cujos vértices incidem  $m=3$  polígonos regulares são os quatro marcados com \* na tabela acima., isto é,  $3.12.12$ ,  $4.6.12$ ,  $4.8.8$  e  $6.6.6$  (ver Figuras 5 e 6).

**Caso  $m = 4$ :** (quatro polígonos regulares em cada vértice)

Seja  $n_i$  o número de lados de cada um desses 4 polígonos regulares com  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$  temos

$$\sum (180 - \frac{360}{n_i}) = 360 \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{4}{n_1} \Rightarrow 3 \leq n_1 \leq 4$$

$$n_1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{3}{n_2} \Rightarrow 3 \leq n_2 \leq 4$$

$$n_1 = n_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow 4 \leq n_3 \leq 6 \\ \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n_3} = \frac{n_3 - 3}{3n_3} \Rightarrow n_3 = 4, n_4 = 12 \text{ ou } n_3 = 6 = n_4 \end{cases}$$

$$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{12} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = 4 \text{ e } n_4 = 6$$

$$n_1 = n_2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = 4 = n_4$$

Resumindo, a tabela abaixo dá as quatro possíveis combinações para  $m=4$ , isto é, para quatro polígonos regulares num vértice (ver também Figura 5). Veremos que apenas as indicadas com (\*) na tabela definem mosaicos quase-regulares. Note que, agora, a *ordem* dos polígonos em torno do vértice pode ser importante: 3.3.6.6 é diferente de 3.6.3.6.

$m=4$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
	3	3	4	12
	3	3	6	6
*	3	6	3	6
	3	4	3	12
*	3	4	6	4
	3	4	4	6
*	4	4	4	4

Tabela 3

Os vértices com escolhas 3.3.4.12, 3.4.3.12 e 3.4.4.6 não podem se estender para formar um mosaico com as condições a), b) e c), como sugere a Figura 3 abaixo. Em 3.3.4.12 obriga-se a ter outro vértice contendo ...3.3.3...; em 3.4.4.6 obriga-se a ter um vértice 3.4.6.4, que é diferente. Em todos os casos a condição c) é violada.

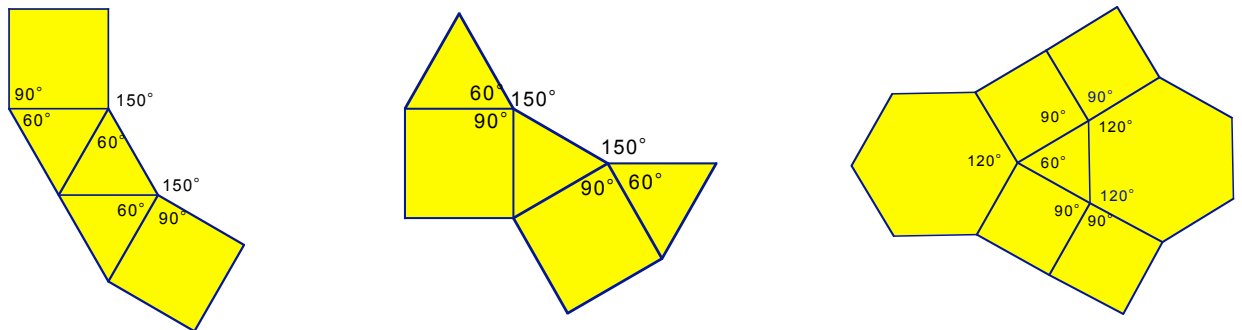


Figura 3

O vértice com escolha 3.3.6.6 estende-se a um mosaico que não obedece a condição c), como se vê na Figura 4 abaixo, pois surge um vértice com ...3.3.3... (analogamente ao caso 3.3.4.12).

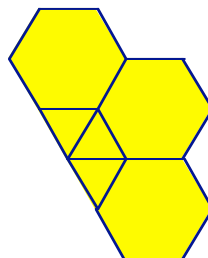


Figura 4

Os três tipos possíveis de mosaicos quase-regulares com  $m=4$  polígonos regulares incidindo em cada vértice são os marcados com \* na Tabela 3 acima, isto é, os indicados por 3.6.3.6, 3.4.6.4 e 4.4.4.4 (Figura 6).

**Caso  $m=5$ :** (cinco polígonos regulares em cada vértice)

Seja  $n_i$  o número de lados de cada um desses polígonos regulares incidindo num vértice, com  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ , temos que ter

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} \leq \frac{5}{n_1} \Rightarrow n_1 = 3,$$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \leq \frac{4}{n_2} \Rightarrow n_2 = 3,$$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{3}{n_3} \Rightarrow n_3 = 3,$$

$$\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_4} \Rightarrow n_4 = 3, n_5 = 6 \text{ ou } n_4 = n_5 = 4.$$

A Tabela 4 abaixo dá todas as escolhas para  $m=5$ , isto é, para cinco polígonos regulares incidindo num vértice e os tipos de mosaicos 3.3.3.3.6, 3.3.3.4.4 e 3.3.4.3.4 (Figuras 5 e 6).

$m=5$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
*	3	3	3	3	6
*	3	3	3	4	4
*	3	3	4	3	4

Tabela 4

**Caso  $m=6$ :** (seis polígonos regulares em cada vértice)

Como nos casos anteriores,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2 \Rightarrow n_i = 3, \forall i = 1, 2, \dots, 6.$$

E o único tipo possível é 3.3.3.3.3.3.

$m=6$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$
*	3	3	3	3	3	3

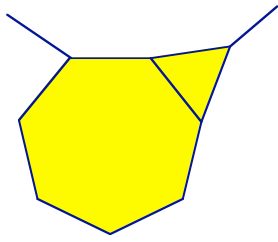
Tabela 5

Resumindo, temos três tipos de mosaicos regulares e oito tipos quase-regulares conforme Figura 6.

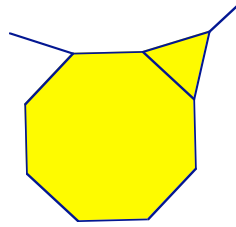
**Resumo das combinações de polígonos regulares, possíveis, num vértice**

Na Figura 5 abaixo apresentamos as possíveis combinações de polígonos regulares num vértice.

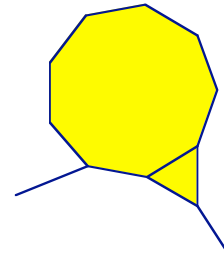
Porém, como vimos, nem todas definem mosaicos quase regulares.



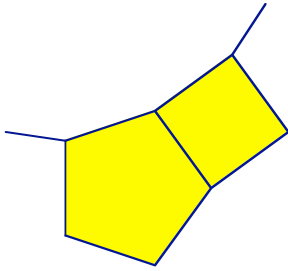
3.7.42



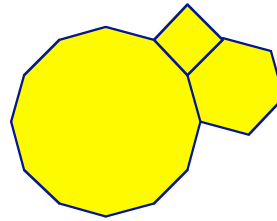
3.8.24



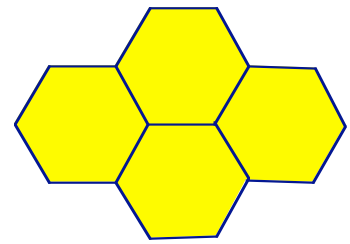
3.9.18



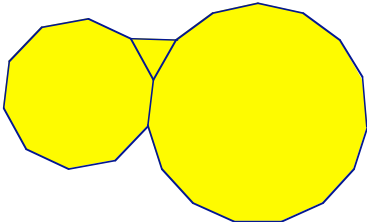
4.5.20



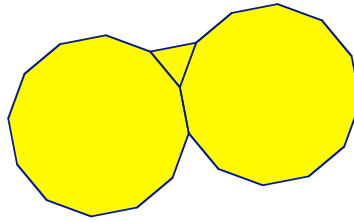
4.6.12



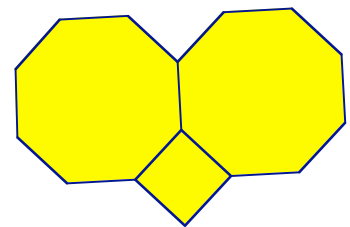
6.6.6



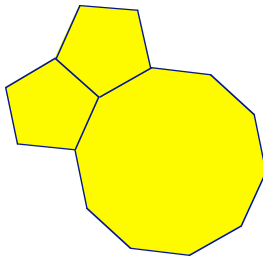
3.10.15



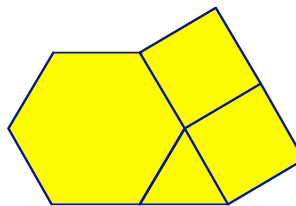
3.12.12



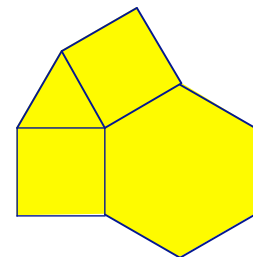
4.8.8



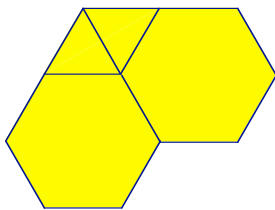
5.5.10



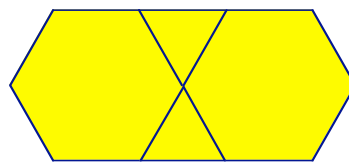
3.4.4.6



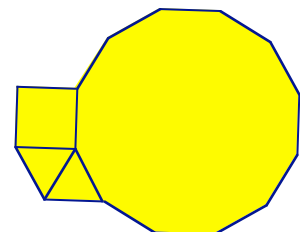
3.4.6.4



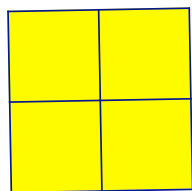
3.3.6.6



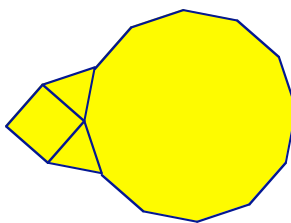
3.6.3.6



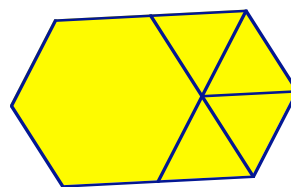
3.3.4.12



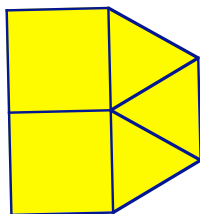
4.4.4.4



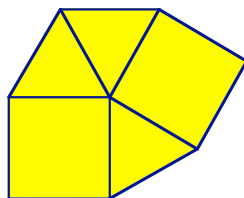
3.4.3.12



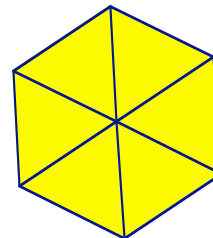
3.3.3.3.6



3.3.3.4.4



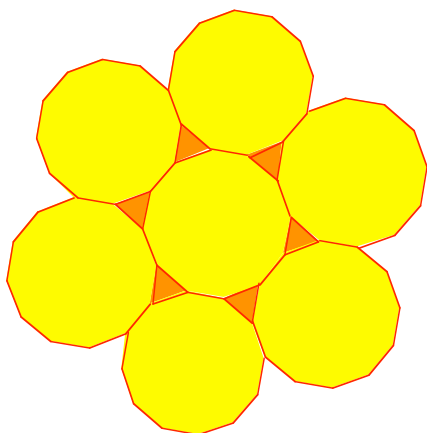
3.3.4.3.4  
Figura 5



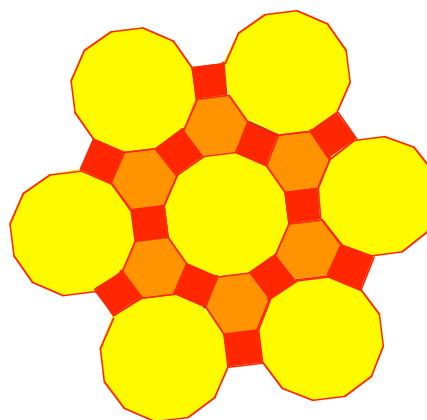
3.3.3.3.3.3

### Tabela dos mosaicos regulares e quase-regulares

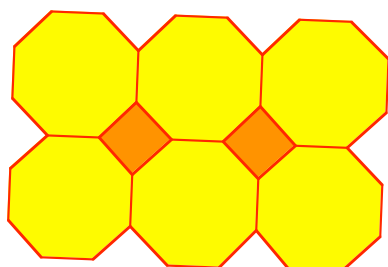
Nesta Figura 6 temos os 11 tipos possíveis de mosaicos quase-regulares sendo 3 deles regulares.



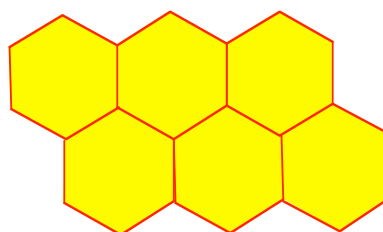
3.12.12



4.6.12

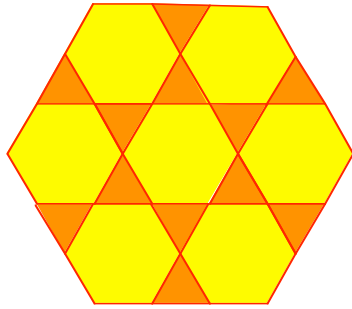


4.8.8

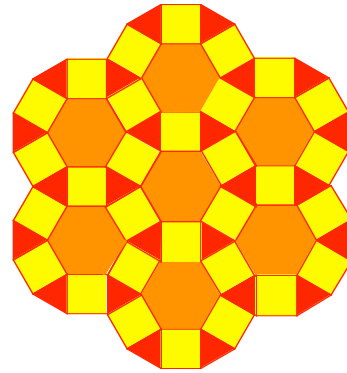


6.6.6

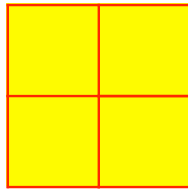




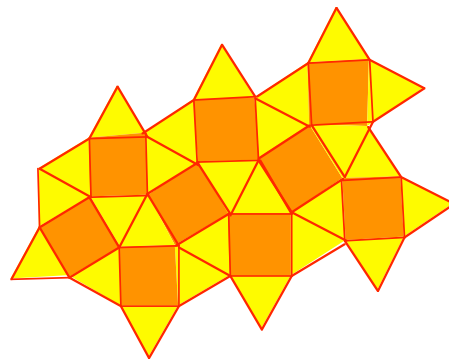
3.6.3.6



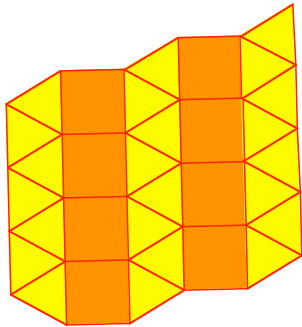
3.4.6.4



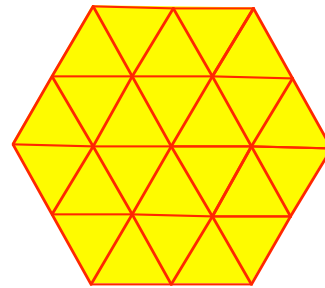
4.4.4.4



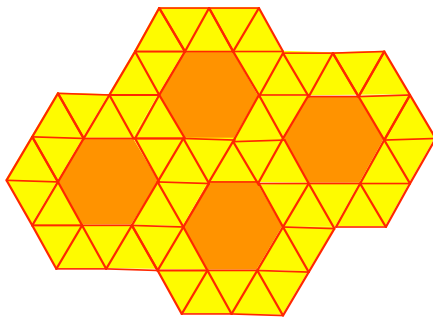
3.4.3.3.4



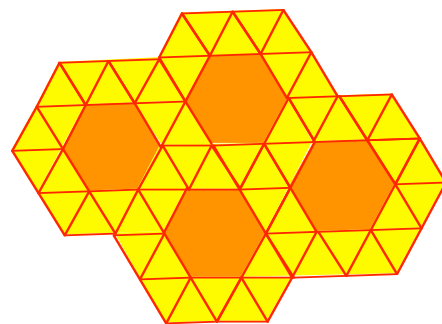
3.3.3.4.4



3.3.3.3.3.3



3.3.3.3.6



3.3.3.3.6

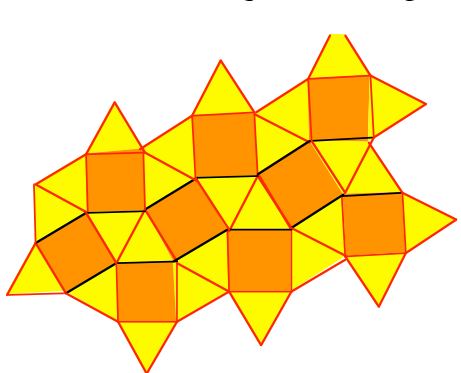
Figura 6

### Outros mosaicos com polígonos regulares

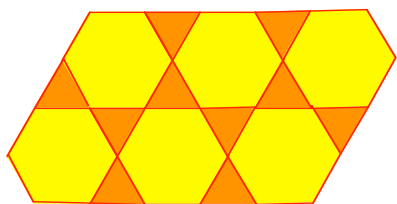
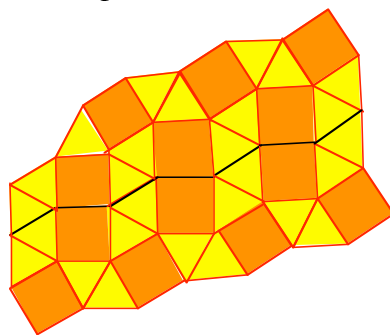
Dizemos que dois mosaicos são iguais se coincidem por um movimento rígido no plano (inclusive reflexão) composto com uma mudança de escala. Assim, dois mosaicos do mesmo tipo são chamados de iguais. Observamos que só para o tipo 3.3.3.3.6 é necessário considerar reflexão para chamar de iguais as duas imagens por espelho (*enantiomórficas*).

Pode ser obtida uma infinidade (não enumerável?) de ladrilhamentos de mosaico quase-regular se relaxarmos a condição c), pedindo que cada vértice tenha os mesmos polígonos mas não necessariamente na mesma ordem. Assim, podemos alterar

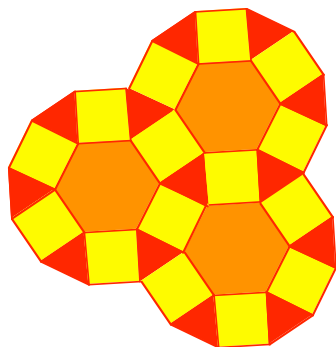
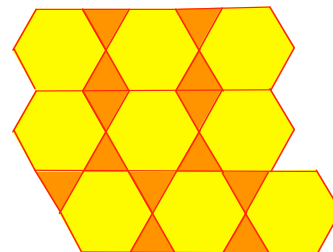
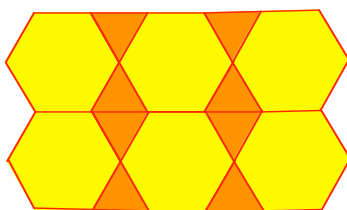
- 3.4.3.3.4, cortando ao longo de um zig-zag e juntando as duas metades restantes
- 3.6.3.6, transladando uma faixa horizontal independentemente das outras.
- 3.4.6.4, rodando de  $30^\circ$  um "disco" formado por um hexágono e seus vizinhos, observando que "discos" podem ser rodados independentemente



3.4.3.3.4



3.6.3.6



3.4.6.4

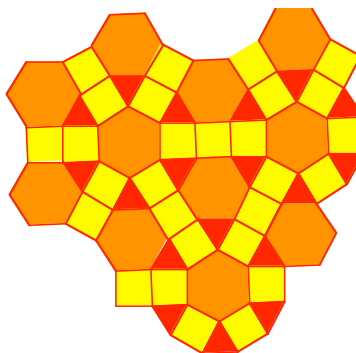


Figura 7

### Mosaicos com quadriláteros

Existe ladrilhamento com um quadrilátero dado qualquer: iniciando com o quadrilátero ABCD, aplicando uma reflexão em torno de um lado seguida de uma reflexão em torno da mediatriz desse lado e assim sucessivamente, ladrilhamos o plano.

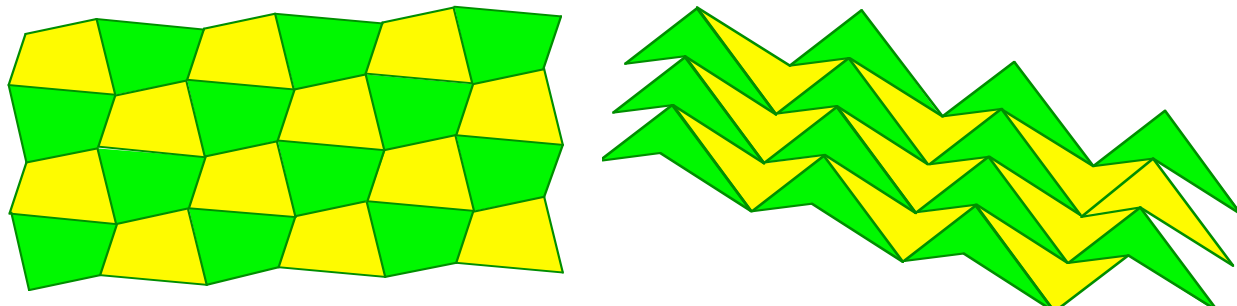


Figura 8

No caso do ladrilho ser um paralelogramo, não retângulo, existe uma infinidade (não enumerável?) de ladrilhamentos possíveis. Dar exemplos.

### Mosaicos com pentágonos

Apesar de não haver pavimentações quase-regulares ou regulares com pentágonos regulares existem com pentágonos não regulares. Na Figura 9 abaixo temos uma pavimentação com pentágonos, não regulares, mas com todos os lados iguais.

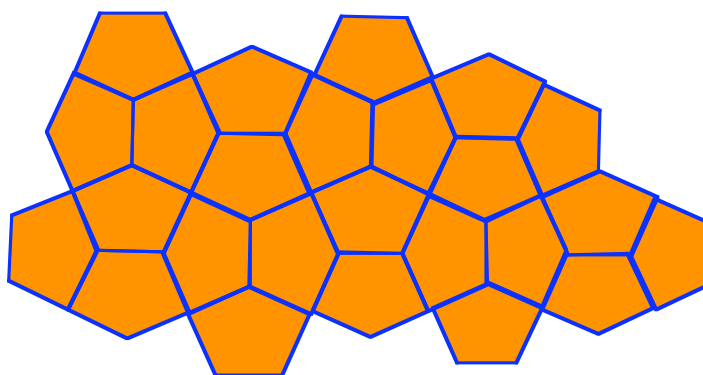
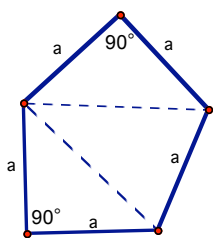


Figura 9

Outros mosaicos podem ser determinados com pentágonos regulares e com losangos de lados iguais aos do pentágono e ângulos de  $36^\circ$  e  $144^\circ$ , como na Figura 10 abaixo.

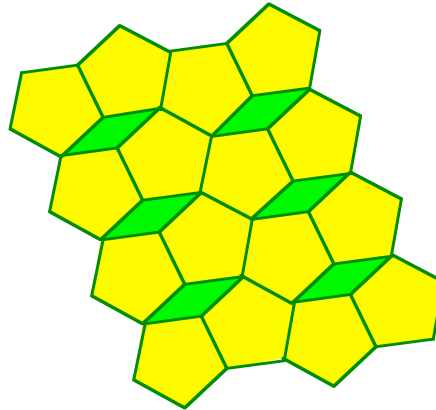


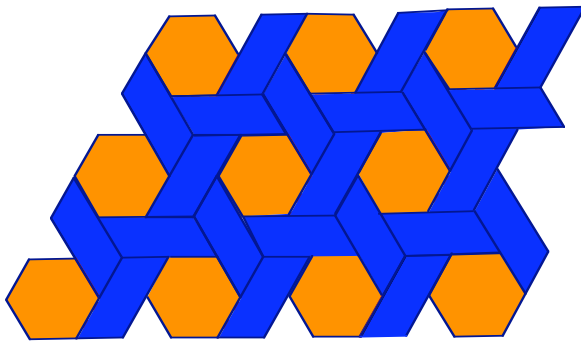
Figura 10

### Mosaicos aperiódicos de Penrose

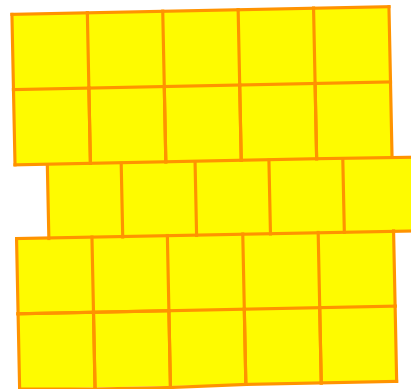
Se o grupo de simetria de um mosaico tem *por pelo menos duas translações não paralelas*, então, o mosaico é chamado de *periódico*. Os mosaicos regulares, por exemplo, são periódicos.

(Responda: entre todos os ladrilhamentos já vistos até aqui quais são periódicos e quais são não-periódicos?).

Abaixo ilustramos dois ladrilhamentos, um periódico e outro não-periódico, que não obedecem nenhuma das condições a), b) ou c).



periódico



não periódico

Figura 11

Uma das mais notáveis descobertas na teoria dos mosaicos ocorreu nos últimos anos: a existência de um conjunto finito de ladrilhos com os quais é possível fazer uma infinidade de tipos distintos de mosaicos do plano e, ainda mais, nenhum dos mosaicos possíveis é periódico. Diz-se que tal conjunto de ladrilhos tem a propriedade de ser *aperiódico*.

Existem vários conjuntos finitos de ladrilhos com essa propriedade mas não se conhece nenhum com uma só peça.

Esse é o **problema**, não resolvido, de “*einstein*” (ein=um, stein=ladrilho): “*É possível ladrilhar o plano euclidiano com uma única peça somente de maneira não periódica?*”.

Outro problema interessante, não resolvido, é o chamado *problema do dominó*: “Existe algum algoritmo para decidir se é possível ladrilhar o plano usando somente um dado ladrilho?”

Existem conjuntos de ladrilhos com os quais é possível fazer pavimentações não periódicas mas não são aperiódicos, pois admitem também ladrilhamentos periódicos. Por exemplo, com ladrilhos retangulares  $2 \times 1$ . (Experimente).

Entre os vários exemplos de mosaicos aperiódicos veremos o mais famoso, com 2 peças, descoberto por Roger Penrose (físico matemático inglês) em 1974. As peças, um papagaio e uma flecha, são obtidas de um losango de ângulo agudo igual a  $72^\circ$  e lado igual ao número de ouro  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$  como se vê na figura abaixo. Em 1984 Penrose mostrou que, colocando uma restrição bem simples como regra de encaixe, é possível ladrilhar todo o plano com essas 2 peças de uma infinidade não enumerável de maneiras.

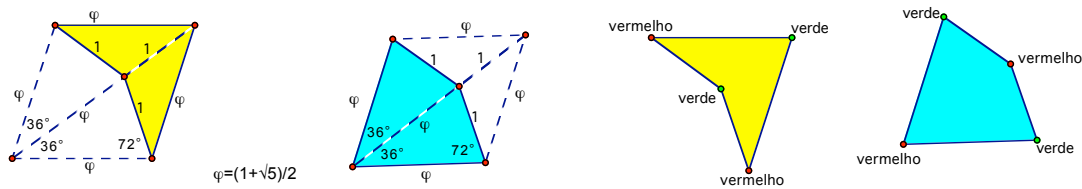


Figura 12

Os vértices opostos das peças são pintados em 2 cores, como na figura acima, e os encaixes permitidos são, apenas, os que mantêm vértices de mesma cor juntos. Observe que, em particular, não se pode juntar peças de modo a formar um losango original.

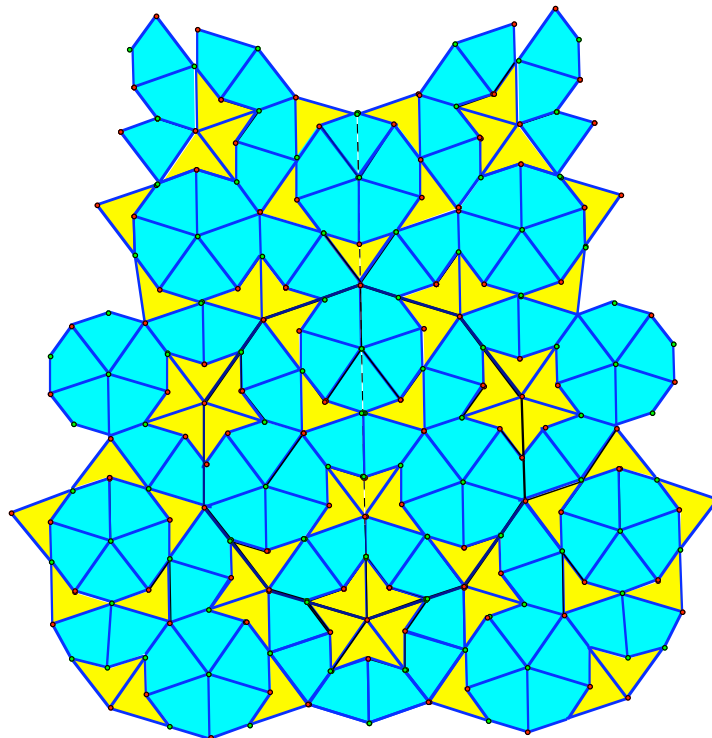


Figura 13

Apesar de aparecerem grupos de peças que se repetem, o ladrilhamento não é a repetição de nenhum arranjo de peças.

*Pergunta:* Se tirarmos as cores dos vértices e proibirmos apenas a formação dos losangos originais, pode-se obter um ladrilhamento periódico?

Toda pavimentação de uma região do plano requer mais papagaios que flechas na proporção de, aproximadamente,  $\varphi/1$ . Na pavimentação de todo o plano a proporção é exatamente  $\varphi/1$ .

Mais ainda, qualquer parte finita de uma pavimentação aparece uma infinidade de vezes em qualquer outra pavimentação.

Podem ser feitas modificações nas peças de modo que não seja necessária a coloração dos vértices, como vemos abaixo.

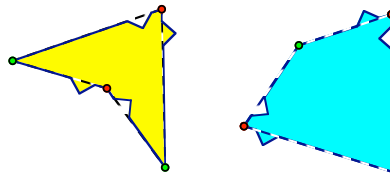


Figura 14

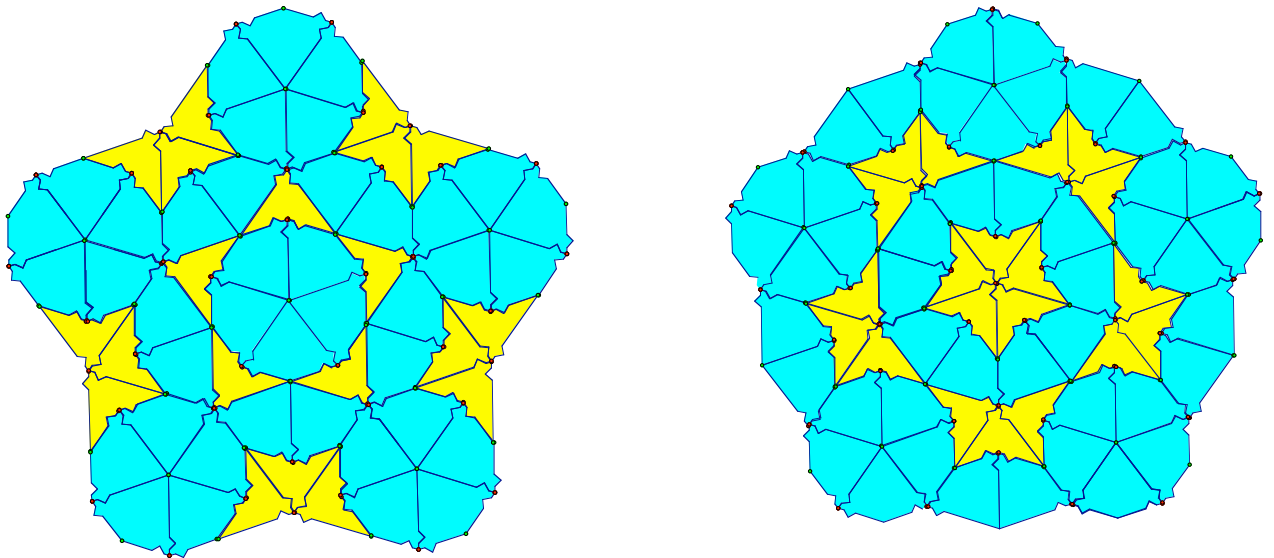


Figura 15

### Duais de pavimentações quase-regulares

São pavimentações formadas a partir de uma pavimentação quase-regular unindo-se os centros dos polígonos. A dual da 3.3.3.3.3 é a 6.6.6 e reciprocamente. A dual da 4.4.4.4 é uma do mesmo tipo. Vemos abaixo a *pavimentação do Cairo*, dual da 6.3.3.3.3, formada com pentágonos irregulares e a dual de uma pavimentação 3.3.3.4.

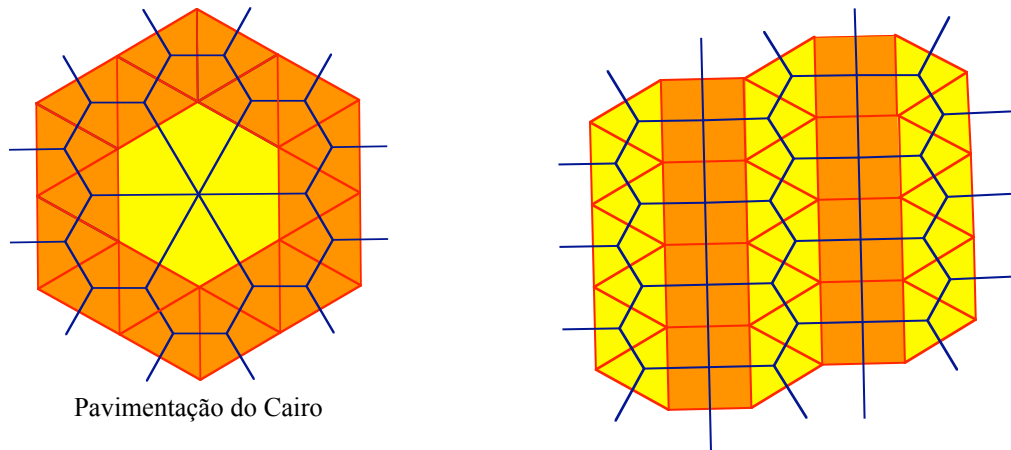


Figura 16

**Nota:** As figuras do texto foram compostas usando o *Sketchpad*.

**Referências Bibliográficas:**

1. ALVES, S. *Ladrilhando o plano com quadriláteros*, R.P.M. n° 51, São Paulo: SBM, 2003.
2. ALVES, S. *Mosaicos no plano*, R.P.M. n° 40, São Paulo:SBM, 1999.
3. WELLS, D. *Dicionário de geometria curiosa*, Lisboa: Gradiva,
4. CUNDY, H.M.; ROLLET, A.P. *Mathematical models*, Oxford, 1961
5. KRAITCHIK, M. *Les mathématiques des jeux*, Bruxelles, 1930
6. GRUNBAUM, B.; SHEPARD, G.C. *Tilings and patterns*, New York: Freeman, 1987.
7. <http://www.math.unl.edu/~cmann/math/heesch/heesch.htm>
8. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html>
9. [http://en.wikipedia.org/wiki/Andreini\\_tessellation](http://en.wikipedia.org/wiki/Andreini_tessellation)