

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PAVIMENTAÇÕES NO PLANO EUCLIDIANO

Rosiene de Fátima Corrêa Ruiz Castro

Orientador: Prof. Francisco Dutenhefner

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Belo Horizonte, Julho de 2008

RESUMO

O Principal objetivo desse trabalho é desenvolver um estudo sistemático das Pavimentações no plano Euclidiano, apresentando as construções dos polígonos regulares que pavimentam o plano e a demonstração da não existência de polígonos com mais de seis lados que pavimentam o plano.

Agradeço ao Professor Doutor Francisco Dutenhefner pela paciência e a dedicação na elaboração desta monografia.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: CONCEITOS BÁSICOS	4
1.1. LINHA POLIGONAL	4
1.2. INTERIOR E EXTERIOR DE UMA LINHA POLIGONAL	4
1.3. POLÍGONOS	5
1.4. POLÍGONO CONVEXO E POLÍGONO NÃO CONVEXO.....	5
CAPÍTULO 2: PAVIMENTAÇÕES DO PLANO EUCLIDIANO.....	6
2.1. PAVIMENTAÇÃO PARCIAL.....	6
2.2. PAVIMENTAÇÃO IDEAL.....	6
2.3. ELEMENTOS DE UMA PAVIMENTAÇÃO	7
2.4. ALGUNS TIPOS DE PAVIMENTAÇÕES.....	7
CAPÍTULO 3: PAVIMENTAÇÕES REGULARES DO PLANO EUCLIDIANO.....	9
CAPÍTULO 4: ALGUMAS PAVIMENTAÇÕES MONOÉDRICAS DO PLANO EUCLIDIANO.....	12
4.1. PAVIMENTAÇÃO POR <i>TRIÂNGULOS</i>	12
4.2. PAVIMENTAÇÃO POR <i>QUADRILÁTEROS</i>	13
4.3. PAVIMENTAÇÃO POR <i>HEXÁGONOS</i>	16
CAPÍTULO 5: PAVIMENTAÇÃO MONOÉDRICAS POR PENTÁGONOS CONVEXOS.....	24
CAPÍTULO 6: POLÍGONOS CONVEXOS QUE NÃO PAVIMENTAM O PLANO	30
6.1. ENUNCIADOS DOS TEOREMAS E COROLÁRIOS	30
6.2. PRÉ-REQUISITOS	31
6.3. DEMONSTRAÇÃO DA PARTE (A) DO TEOREMA	33
6.4. DEMONSTRAÇÃO DA PARTE (B) DO TEOREMA	42
BIBLIOGRAFIA.....	51

INTRODUÇÃO

Pavimentar consiste em cobrir superfícies planas com figuras regulares ou não, de um tipo ou mais, sem falhas entre as figuras e sem sobreposição.

Os padrões geométricos obtidos pelas pavimentações são observados na natureza, como por exemplo, no arranjo das escamas de peixes, nas bolhas de sabão, nos arranjos de cristais e nas colméias e reproduzida pelo homem desde os tempos antigos.

Esses padrões geométricos estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, romana, persa, egípcia, grega, islâmica, árabe, chinesa e outras. Aparecem em todos os lugares e tem uma grande variedade de aplicação em Física, Geologia, Engenharia, Computação Gráfica, Artes, Arquitetura e na decoração de objetos, como cerâmicas, forros, tecidos e outros.

A técnica de pavimentação na ornamentação e na construção foi muito difundida com as civilizações greco-romana, um exemplo da utilização dessa técnica foi a construção do palácio de Alhambra, construído por volta de 1284, pelos mouros, na cidade de Granada na Espanha onde são encontrados vários padrões de pavimentações.

Os islâmicos utilizaram essa técnica de uma forma mais geométrica, na fabricação de tecidos e tapetes, onde aparecem às pavimentações com figuras geométricas. Mas os primeiros registros com um tratamento matemático que se tem sobre a teoria das pavimentações no plano Euclidiano, foram realizados em 1600 por Johannes Kepler, matemático e físico alemão.

Em seu livro “Harmonia do Mundo”, de 1619, Kepler apresenta uma classificação das pavimentações obtidas a partir dos trabalhos de Platão e Arquimedes sobre poliedros.

As pavimentações regulares, semi-regulares ou arquimedianas surgem assim por analogia com os poliedros platônicos e arquimedianos.

O presente trabalho constitui-se em um estudo das pavimentações no plano Euclidiano, onde serão apresentados: os tipos de pavimentações, algumas construções de

pavimentações monoédricas do plano euclidiano, as isometrias aplicadas para a obtenção das mesmas e uma demonstração para a não existência de pavimentação do plano com polígonos convexos com sete lados ou mais.

CAPÍTULO 1: CONCEITOS BÁSICOS

Antes de tratarmos das pavimentações do Plano Euclidiano, vamos definir os conceitos e as terminologias que serão utilizadas durante toda a monografia.

1.1. Linha poligonal

Uma *linha poligonal* é a união de um número finito de segmentos $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_nP_{n+1}$, tais que três pontos consecutivos P_{i-1}, P_i, P_{i+1} não são colineares. Os pontos P_i são os vértices da linha poligonal.

Uma linha poligonal $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_nP_{n+1}$ é chamada de *fechada* se $P_{n+1} = P_1$. Caso contrário ela é *aberta*.

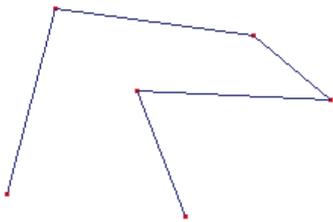


Fig 1: linha poligonal aberta

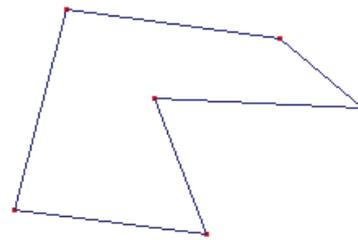


Fig 2: linha poligonal fechada

Uma linha poligonal $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_nP_{n+1}$ é chamada de *simples* se dois segmentos não consecutivos que a compõem são disjuntos.

1.2. Interior e exterior de uma linha poligonal

Uma linha poligonal simples e fechada divide o plano em três conjuntos: uma região limitada, uma região ilimitada e a própria poligonal. Dizemos que os pontos da região limitada estão no *interior* da linha poligonal, e que os pontos da região ilimitada estão no *exterior* da linha poligonal.

1.3. Polígonos

Uma linha poligonal simples e fechada L também é chamada de *polígono*. Os pontos no interior desta linha poligonal L formam a *região poligonal* P , cuja fronteira é a linha poligonal L . Observe que uma região poligonal é um subconjunto aberto do plano Euclidiano.

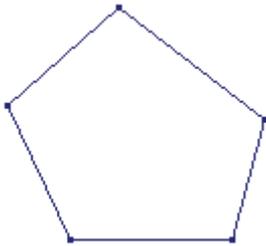


Fig 3: linha poligonal L

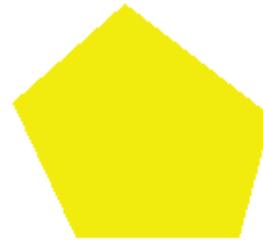


Fig 4: polígono ou região poligonal P cuja fronteira é a linha poligonal L .

Observação: para evitar um formalismo desnecessário, usaremos a terminologia *polígono* para representar tanto uma linha poligonal quanto a região poligonal que ela limita. Por exemplo, a terminologia triângulo será usada para indicar uma linha poligonal de três lados ou para indicar a região triangular.

1.4. Polígono convexo e polígono não convexo

Um polígono é *convexo* se cada reta determinada por dois de seus vértices consecutivos não intersectar os seus outros lados.

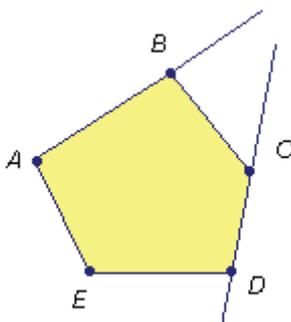


Fig 5: Polígono convexo

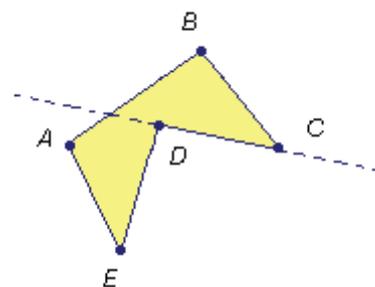


Fig 6: polígono não convexo

CAPÍTULO 2: PAVIMENTAÇÕES DO PLANO EUCLIDIANO

2.1. Pavimentação Parcial

Seja L uma linha poligonal simples e fechada. Uma *pavimentação* da região poligonal P limitada por L é uma subdivisão de P em um número finito de polígonos tais que:

- (1) a união de todos esses polígonos e suas fronteiras é igual a de P ;
- (2) a interseção de dois desses polígonos é vazia.

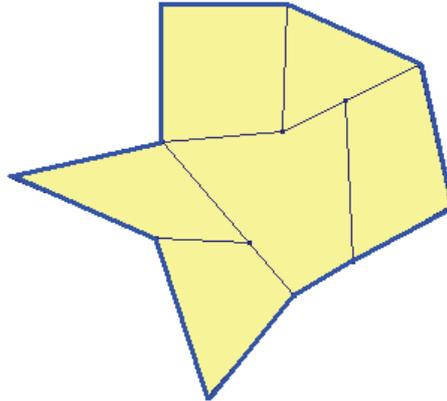


Fig 7: Pavimentação parcial constituída de 6 polígonos, da linha poligonal azul

Uma pavimentação de uma região poligonal também é chamada de uma *pavimentação parcial* do Plano Euclidiano.

2.2. Pavimentação Ideal

Uma *pavimentação ideal* do Plano Euclidiano é uma subdivisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos tais que:

- (1) a união de todos esses polígonos e suas fronteiras é todo o plano;
- (2) a interseção de dois desses polígonos é vazia.

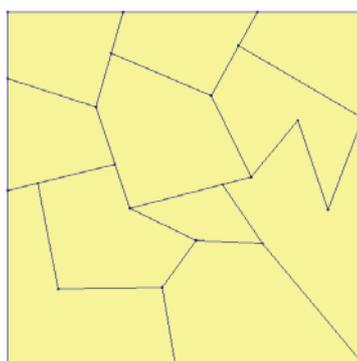


Fig 8: Pavimentação ideal

Observação:

- Pavimentar é o mesmo que *tesselar*.
- Os polígonos de uma pavimentação parcial ou ideal também podem ser chamados de *ladrilhos* da pavimentação.

2.3. Elementos de uma pavimentação

Consideremos uma pavimentação parcial ou ideal do plano Euclidiano. Definimos:

Nós

Os vértices dos polígonos da pavimentação são denominados *nós*.

Nesta definição é importante chamar a atenção para o fato de que em um dado polígono da pavimentação, pode aparecer, na sua fronteira, uma quantidade de nós maior que a quantidade de vértices. Por exemplo, na figura ao lado, o polígono 1 é um pentágono, com 5 vértices e 6 nós. Já o polígono 2 tem a mesma quantidade de nós e vértices.

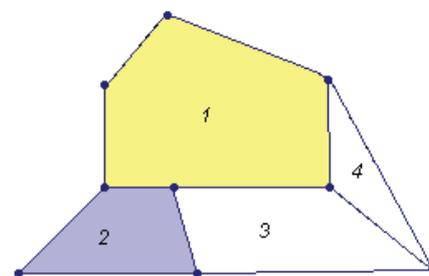


Fig 9

Arestas

As *arestas* de uma pavimentação são os segmentos de reta que tem por extremidades dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono. Dessa forma as arestas da pavimentação podem ser lados ou parte de lados de polígonos que a define. Por exemplo, na figura 9, o polígono 1 é um pentágono, naturalmente com cinco lados, mas na pavimentação, na sua fronteira, estão contidas seis arestas.

2.4. Alguns tipos de pavimentações

As pavimentações, parciais ou ideais do plano Euclidiano podem se classificadas de acordo com as seguintes definições:

Pavimentação lado-lado

Uma pavimentação é *lado-lado* se cada uma de suas arestas é lado de algum dos polígonos que a define, ou equivalentemente, se todo nó na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice do polígono. Dessa maneira,

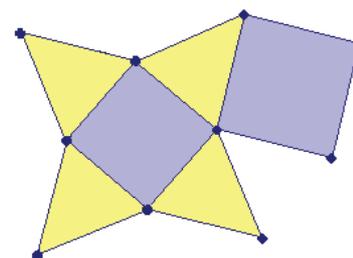


Fig 10

uma pavimentação lado-lado é formada pela justaposição de polígonos através de lados congruentes.

Pavimentações monoédricas ou puras

São pavimentações constituídas de polígonos congruentes entre si.

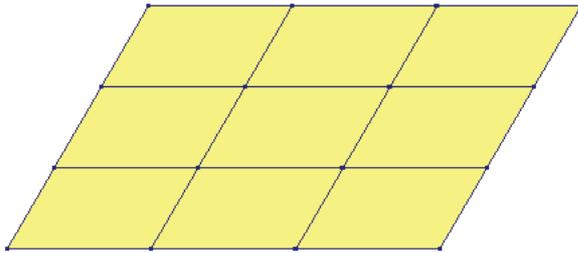


Fig 11

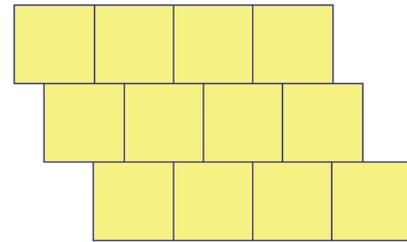


Fig 12

Pavimentações regulares

São pavimentações monoédricas e lado-lado em que os ladrilhos são polígonos regulares.

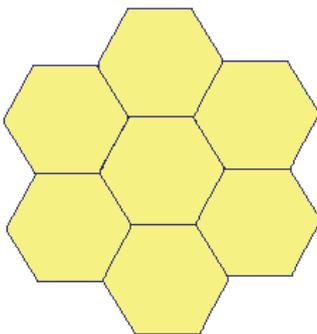


Fig 13

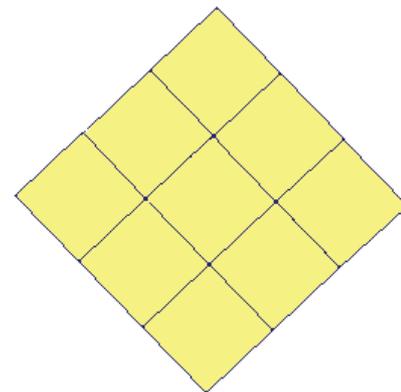


Fig 14

Pavimentação transitiva

Uma pavimentação é *transitiva* se dadas duas peças quaisquer da pavimentação existir uma isometria do plano Euclidiano que preserva a pavimentação e que leva uma destas peças na outra.

CAPÍTULO 3: PAVIMENTAÇÕES REGULARES DO PLANO EUCLIDIANO

É comum, no dia-a-dia, encontrarmos pavimentações formadas por polígonos regulares de um só tipo: no revestimento de pisos utilizando cerâmicas quadrangulares, nas praças ou ruas pavimentadas por hexágonos.

A pergunta é: Quais polígonos regulares servem como ladrilhos de uma pavimentação regular do plano?

A resposta para essa pergunta depende da medida do ângulo interno do polígono regular da pavimentação.

O ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado pela expressão $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$.

Polígono regular	Número de lados	Ângulo interno
Triângulo equilátero	3	60°
Quadrado	4	90°
pentágono	5	108°
hexágono	6	120°

Suponhamos que se tenha uma pavimentação regular do plano formada exclusivamente por polígonos regulares de n lados. Se em um nó desta pavimentação aparecem m polígonos, então a soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice deve ser igual a 360° , ou seja, $m \times \left[\frac{(n-2)}{n} \cdot 180 \right] = 360$. Simplificando esta equação chegamos à igualdade $m = \frac{2n}{n-2}$. Como $m \geq 3$ obtemos a desigualdade $\frac{2n}{n-2} \geq 3$ que é equivalente a $n \leq 6$. Portanto, concluímos que os únicos candidatos a ladrilhos de uma pavimentação regular do plano são:

- Triângulo equilátero;
- Quadrado;
- Pentágono regular;
- Hexágono regular.

Vamos agora analisar quais desses polígonos realmente pavimentam o plano.

- Se $n = 3$ obtemos $m = \frac{2n}{n-2} = 6$. A figura abaixo ilustra exatamente esta situação: uma pavimentação regular do plano por triângulos equiláteros sendo que em cada nó concorrem 6 triângulos.

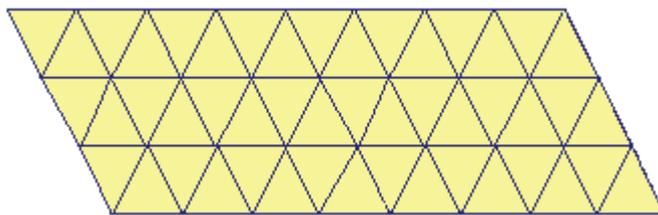


Fig 15

- Se $n = 4$ obtemos $m = \frac{2n}{n-2} = 4$. A figura abaixo ilustra exatamente esta situação: uma pavimentação regular do plano por quadrados sendo que em cada nó concorrem 4 quadrados.

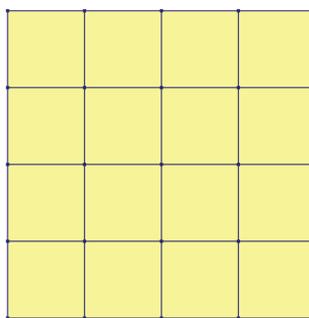


Fig 16

- Se $n = 5$ obtemos $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{10}{3} = 3,333\dots$. Mas como m deve ser um número inteiro, concluímos que o pentágono regular não pode ser utilizado como ladrilho de uma pavimentação regular do plano. De fato, como está ilustrado a seguir, podemos colocar três pentágonos ao redor de um vértice, mas se colocarmos o quarto pentágono, este irá se sobrepor ao primeiro.

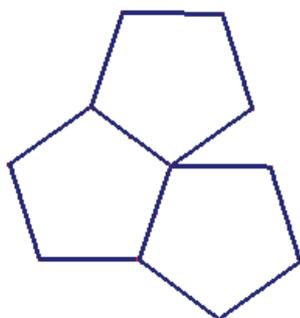


Fig 17

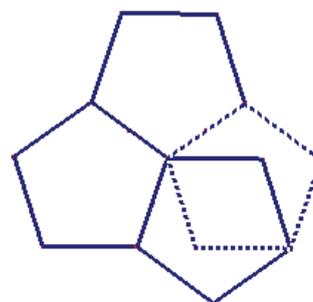


Fig 18

- Se $n = 6$ obtemos $m = \frac{2n}{n-2} = 3$. A figura abaixo ilustra exatamente esta situação: uma pavimentação regular do plano por hexágonos regulares sendo que em cada nó concorrem 3 hexágonos.

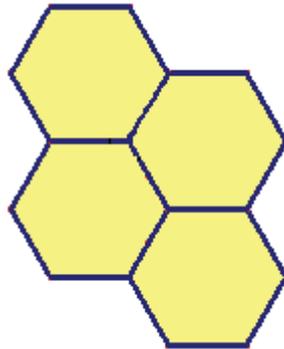


Fig 19

Deste modo, concluímos que somente o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser utilizados como ladrilhos de uma pavimentação regular do plano.

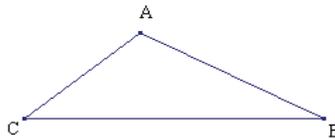
CAPÍTULO 4: ALGUMAS PAVIMENTAÇÕES MONOÉDRICAS DO PLANO EUCLIDIANO

4.1. Pavimentação por *Triângulos*

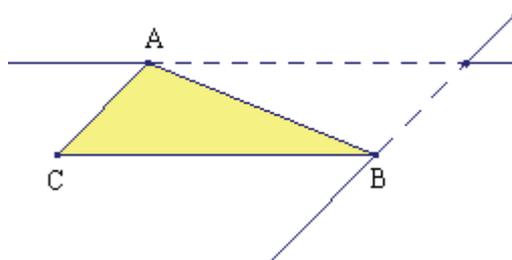
Teorema: Qualquer triângulo seja ele escaleno, isósceles ou equilátero, pode ser utilizado para formar uma pavimentação monoédrica do plano.

Demonstração:

1º Passo: seja dado um triângulo ABC:



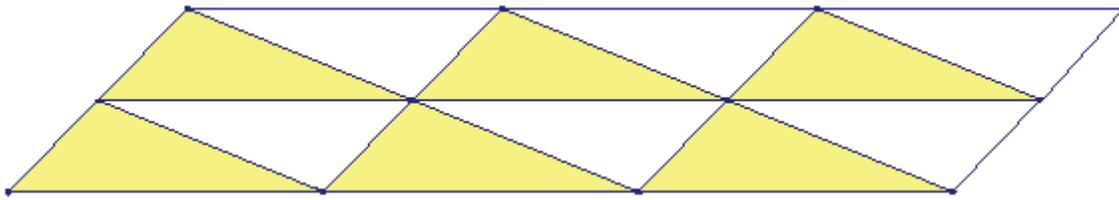
2º Passo: traçando as retas passando pelos vértices A e B paralelas aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, obtém-se um paralelogramo.



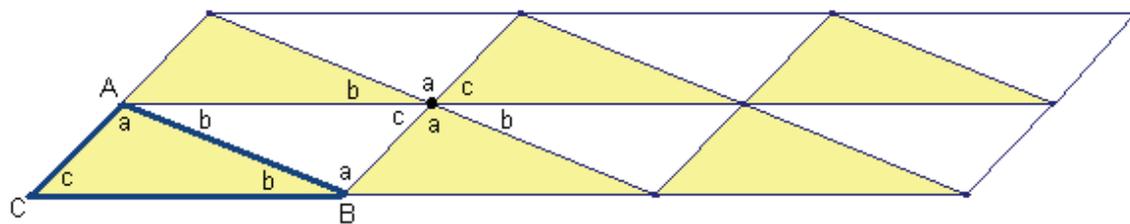
3º Passo: efetuando-se translações desse paralelogramo na direção do vetor \overline{CB} obtém-se uma pavimentação lado-lado de uma faixa horizontal do plano.



4º Passo: efetuando-se translações desta faixa na direção do vetor \overrightarrow{CA} obtém-se a pavimentação monoédrica desejada do plano Euclidiano.



Observação: ao redor de cada nó da pavimentação construída acima, aparecem todos os ângulos do triângulo ABC, formando dois ângulos adjacentes de 180° .

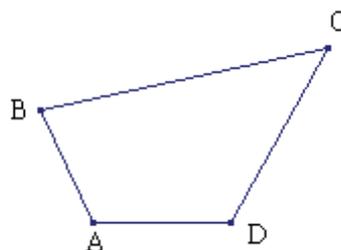


4.2. Pavimentação por *Quadriláteros*

Teorema: Qualquer quadrilátero (convexo ou não) pode ser utilizado para formar uma pavimentação monoédrica do plano.

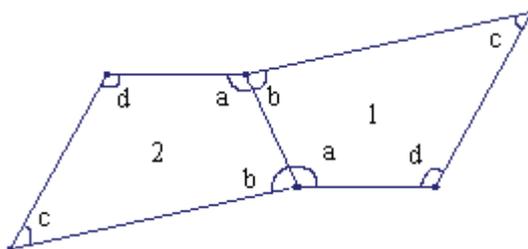
Demonstração:

1º Passo: seja dado um quadrilátero ABCD. Este será o quadrilátero número 1 da pavimentação a ser construída.

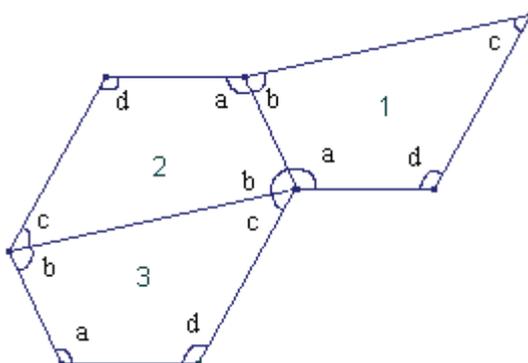


OBS: Representaremos com as correspondentes letras minúsculas os ângulos internos em cada um dos vértices desse quadrilátero.

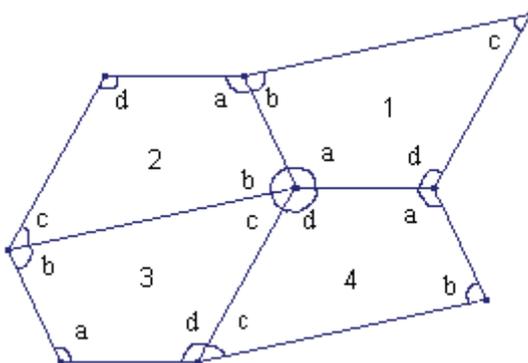
2º Passo: o polígono número 2 da pavimentação é imagem do polígono número 1 pela rotação de 180° ao redor do ponto médio do segmento \overline{AB} .



3º Passo: agora vamos repetir o passo 2, mas considerando uma rotação do polígono 2 ao redor do ponto médio de sua aresta congruente a \overline{BC} . Obtemos assim o polígono número 3 da pavimentação.

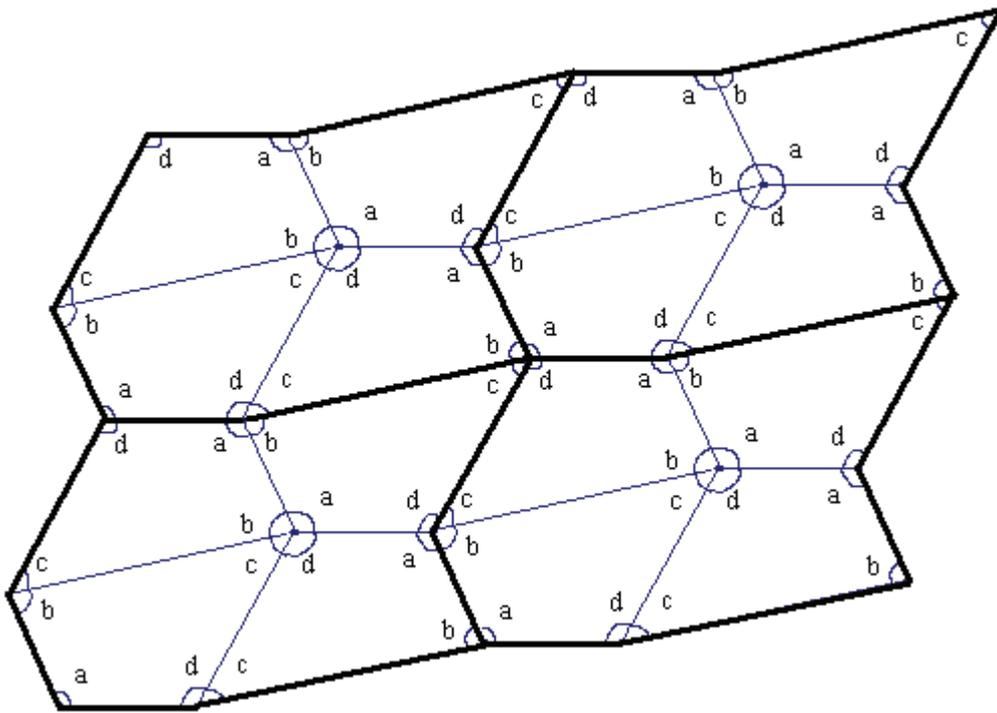


4º Passo: repetimos novamente o passo 2, mas considerando uma rotação do polígono 3 ao redor do ponto médio de sua aresta congruente a \overline{CD} . Obtemos assim o polígono número 4 da pavimentação.

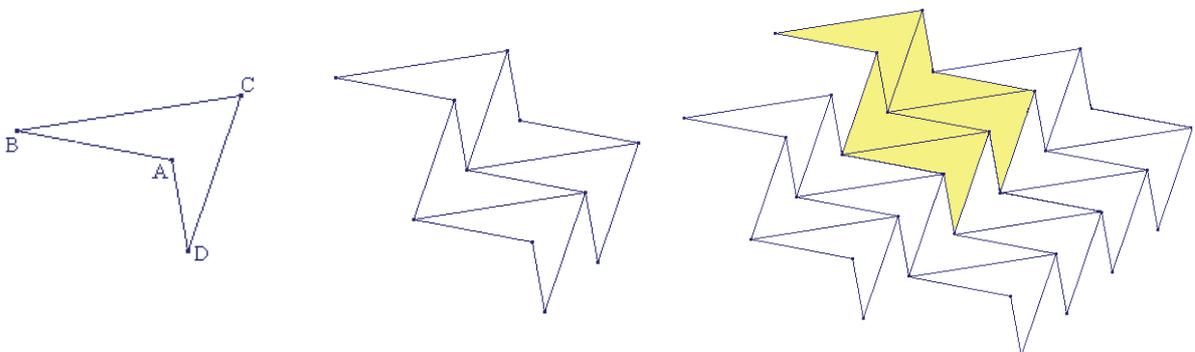


Esses quatro polígonos definem o *domínio fundamental* da pavimentação. Observe que no nó central aparecem todos os ângulos do quadrilátero ABCD. Uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , a construção acima realmente define uma pavimentação parcial ao redor desse ponto.

5º Passo: a pavimentação ideal do plano pode ser obtida através de translações do domínio fundamental construído acima (observe a figura)



Pode-se obter uma pavimentação por qualquer quadrilátero não convexo utilizando rotações de 180° ao redor do ponto médio dos lados do quadrilátero. Obtendo dessa maneira o domínio fundamental. Nas figuras abaixo, da esquerda para a direita, apresentamos um quadrilátero $ABCD$ não convexo, o domínio fundamental e a pavimentação parcial do quadrilátero dado.

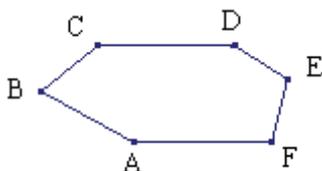


4.3. Pavimentação por Hexágonos

Em 1918, Karl Reinhardt na sua tese de doutorado apresentada na universidade de Frankfurt, provou a existência de apenas três tipos de hexágonos convexos que pavimentam o plano [14]. Observamos que este resultado também foi demonstrado por Bellá Bollobás em 1963, veja referência [2]. A seguir vamos apresentar esses três tipos de hexágonos, além de construir a pavimentação monoédrica correspondente.

1-Hexágono que possui dois lados opostos congruentes e paralelos.

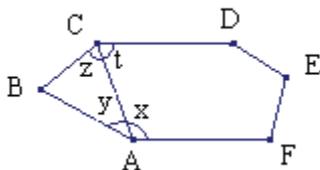
Seja dado um hexágono $ABCDEF$ tal que $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{AF}$. Este será o hexágono numero 1 da pavimentação a ser construída.



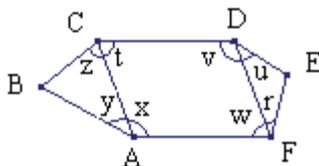
OBS: Na construção a seguir, os ângulos internos em cada um dos vértices deste hexágono serão representados pelas letras que dão nome aos vértices do hexágono.

Passos para a construção da pavimentação:

1º Passo: construir o segmento que une os pontos A e C . O segmento \overline{AC} determina os ângulos x e y no vértice A , e os ângulos z e t no vértice C , formando o triângulo ABC , onde $y + z = 180^\circ$.



2º Passo: repetir o passo anterior para o segmento \overline{DF} , tal que \overline{DF} determina os ângulos w e r no vértice F , os ângulos v e u no vértice D . Obtemos o triângulo DEF onde $u + r = 180^\circ$.



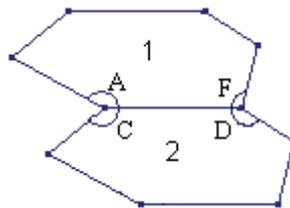
Obs: o quadrilátero $ACDF$ é um paralelogramo, pois tem lados opostos \overline{AF} e \overline{CD} paralelos e de mesma medida. Daí tem-se que $x+t=180^\circ$ e $w+v=180^\circ$.

Agora observe que:

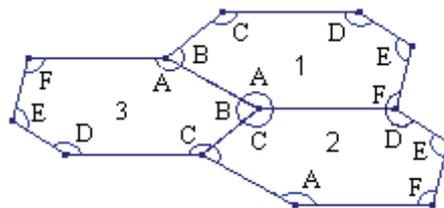
$$a+b+c=(x+y)+b+(z+t)=(x+t)+(y+b+z)=180^\circ+180^\circ=360^\circ$$

$$d+e+f=(v+u)+e+(r+w)=(v+w)+(u+e+r)=180^\circ+180^\circ=360^\circ.$$

3º Passo: o polígono número 2 da pavimentação é imagem do polígono número 1 pela translação e justaposição dos lados congruentes \overline{CD} e \overline{AF} .

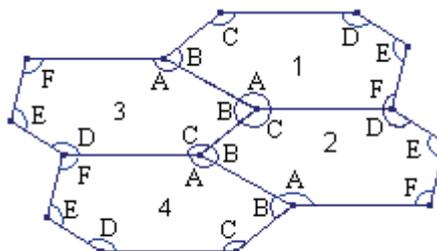


4º passo: O polígono número 3 da pavimentação é a imagem do polígono número 1 pela rotação de 180° ao redor do ponto médio do segmento \overline{AB} do polígono 1.



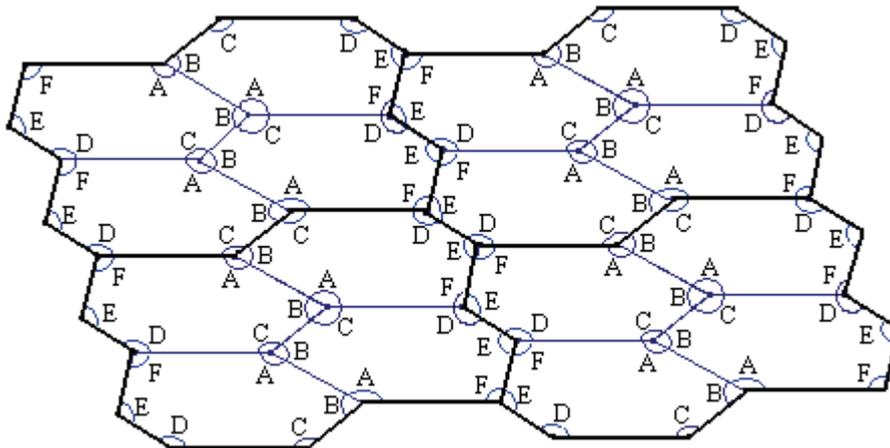
Observação: uma vez que a soma dos ângulos $a+b+c=360^\circ$, temos que os polígonos 2 e 3 se encaixam perfeitamente ao redor do vértice A do polígono número 1.

5º passo: O polígono número 4 da pavimentação é a imagem do polígono número 3 por uma translação tal que o lado \overline{FA} do polígono 4 seja justaposto com o lado \overline{DC} do polígono 3.



Esses quatro polígonos definem o *domínio fundamental* da pavimentação.

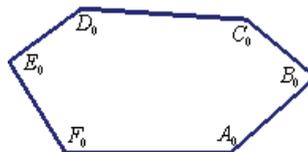
6º passo: a pavimentação ideal do plano por esse tipo de hexágono pode agora ser construída através de translações sucessivas do domínio fundamental descrito acima.



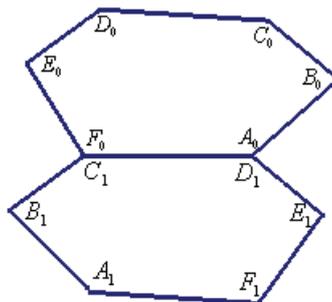
Observação: Nesta pavimentação existem apenas dois tipos de nós: aqueles cuja soma dos ângulos é igual a $a + b + c = 360^\circ$ e aqueles cuja soma dos ângulos é $d + e + f = 360^\circ$.

2-Hexágono que possui dois pares de lados congruentes.

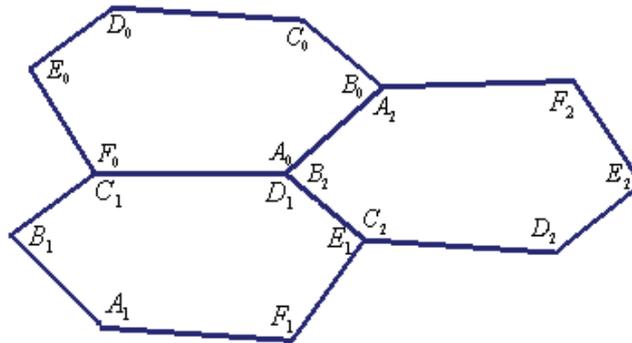
Seja dado o hexágono $ABCDEF$ em que $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$, $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$ e $A + B + D = 360^\circ$. Construa, em qualquer parte do plano, um hexágono $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ congruente a $ABCDEF$.



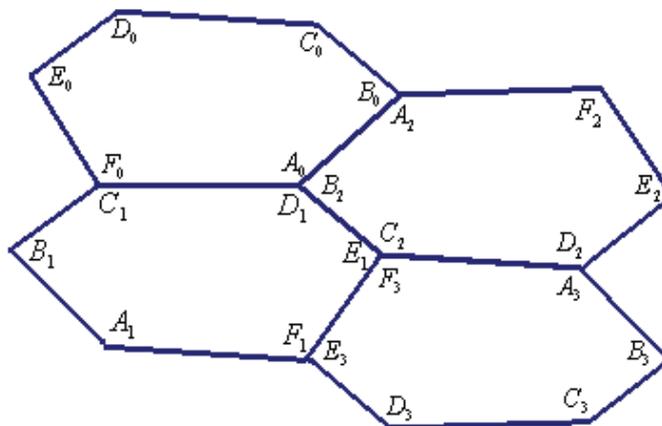
1º Passo: construir um novo hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, coincidindo os vértices D_1 com A_0 e C_1 com F_0 . Observe que isto é possível, pois temos a condição $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$.



2º passo: construir um novo hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, coincidindo o vértice B_2 com os vértices A_0 e D_1 . Observe que os três hexágonos construídos até este momento se encaixam perfeitamente uma vez que são válidas as condições $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$ e $A + B + D = 360^\circ$.



3º passo: construir um outro hexágono $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ como na figura a seguir. Observe que isto é possível pois temos as condições $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$ e $C + E + F = 360^\circ$.

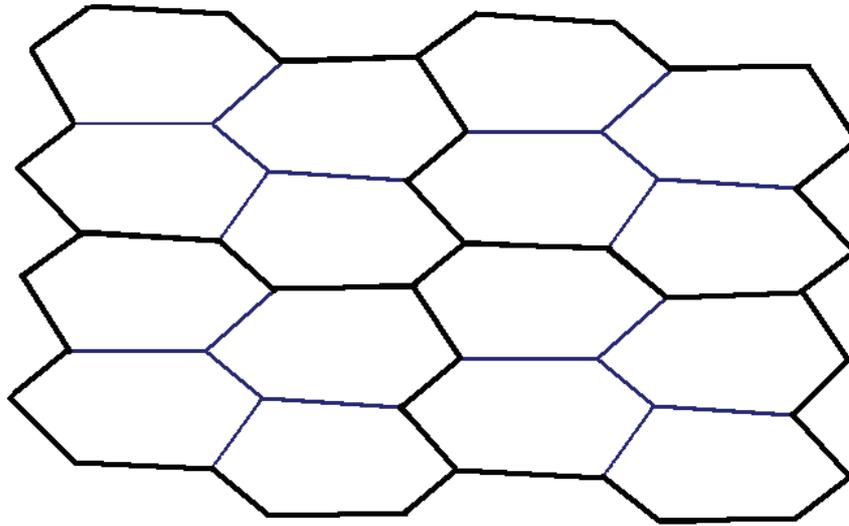


Esses quatro polígonos definem o *domínio fundamental* da pavimentação.

Observação: nesta pavimentação parcial existem apenas dois tipos de nós. O nó formado pelos ângulos A, B e D e o segundo nó formado pelos ângulos C, E e F , esses são ângulos internos do hexágono inicial cuja soma é

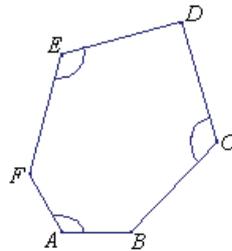
$$(A + B + D) + (C + E + F) = 360^\circ + 360^\circ = 720^\circ.$$

4º passo: a pavimentação ideal do plano por esse tipo de hexágono pode agora ser construída através de translações sucessivas do domínio fundamental descrito acima.

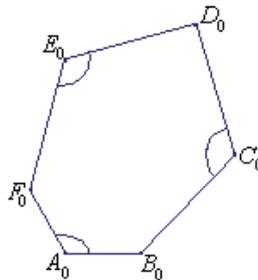


3-Hexágono que possui três pares de lados congruentes e três ângulos congruentes de medida igual a 120° .

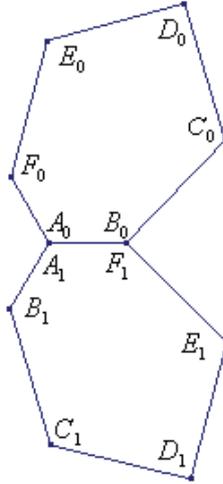
Seja dado um hexágono $ABCDEF$ que satisfaz as condições: $\overline{AB} \equiv \overline{AF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, e que tenha os ângulos $A = C = E = 120^\circ$.



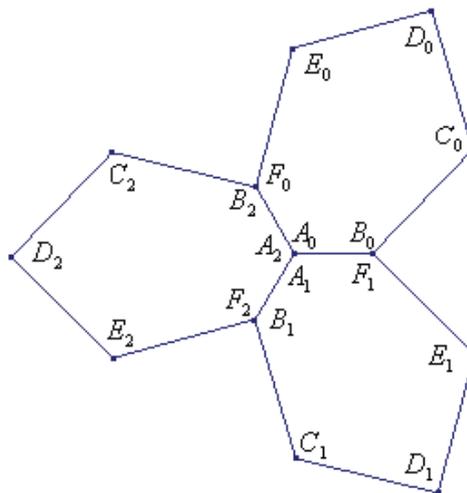
1º passo: desenhe um hexágono $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ congruente com o hexágono $ABCDEF$ em qualquer região do plano.



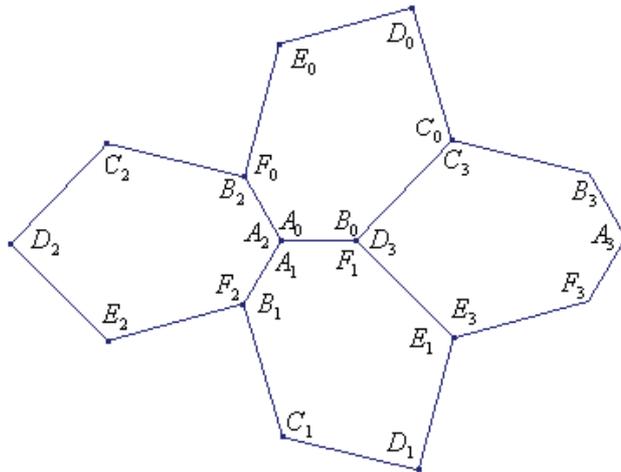
2º passo: construir um novo hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, coincidindo os vértices A_1 com A_0 e F_1 com B_0 . Isto é possível pois $\overline{AB} \equiv \overline{AF}$.



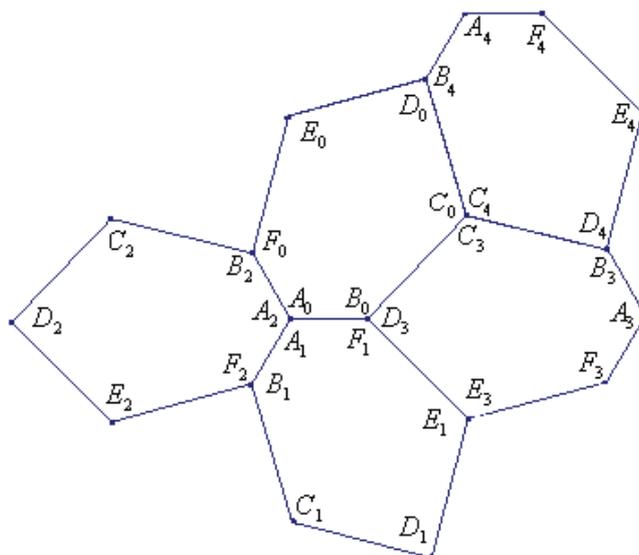
3º passo: construir um novo hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, coincidindo os vértices A_2 com A_0 , B_2 com F_0 e F_2 com B_1 . Observe que os três hexágonos construídos até este momento se encaixam perfeitamente, pois no vértice $A_0 = A_1 = A_2$ existe uma colagem de três ângulos de 120° , totalizando 360° .



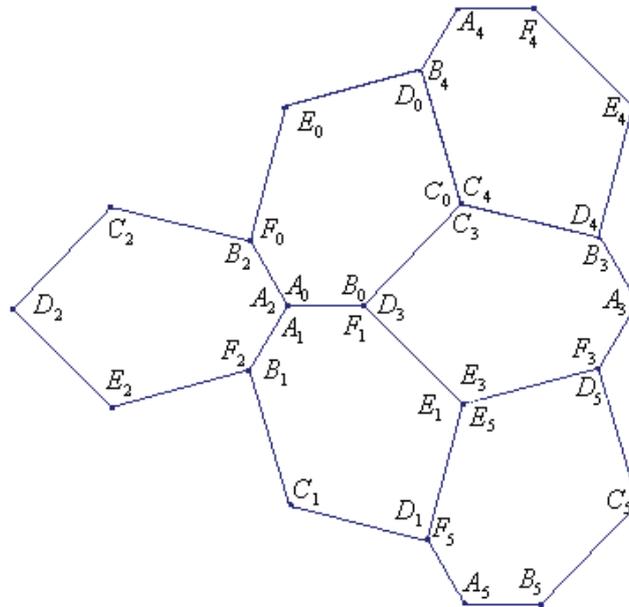
4º passo: na figura acima, afirmamos que no seu lado direito, podemos encaixar um novo hexágono $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ (veja figura a seguir), fazendo coincidir os vértices B_0 e F_1 com D_3 , justapondo o lado B_0C_0 com D_3C_3 e o lado E_1F_1 com E_3D_3 . De fato, isso é possível, pois temos as condições $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$ e, além disso, como a soma dos ângulos de um hexágono é 720° e $A = C = E = 120^\circ$, então $B + D + F = 360^\circ$.



5º passo: encaixamos um novo hexágono $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ (veja figura a seguir), fazendo coincidir os vértices C_0 e C_3 com C_4 , justapondo o lado C_0D_0 com C_4B_4 e o lado B_3C_3 com D_4C_4 , utilizando a condição $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$. Como $C = 120^\circ$ definimos um nó dessa pavimentação formado por três ângulos de 120° .



6º passo: encaixamos um novo hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$ (veja figura a seguir), fazendo coincidir os vértices E_1 e E_3 com E_5 , justapondo o lado E_3F_3 com E_5D_5 e o lado D_1E_1 com F_5E_5 , utilizando a condição $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$. Como $E = 120^\circ$, novamente, definimos um nó dessa pavimentação formado por três ângulos de 120° .



Observação 1: Na pavimentação parcial do plano representada na figura acima, seus nós internos são de quatro tipos: nós de 3 vértices A , nós de 3 vértices C , nós de 3 vértices E e nós com os vértices B , D e F em que $B + D + F = 360^\circ$.

Observação 2: Na figura acima, após o 6º passo, cada nó na fronteira dado pelo encontro de três arestas é de um dos tipos já discutidos em um dos passos anteriores. Assim, repetindo os passos já discutidos, podemos adicionar outras cópias do polígono $ABCDEF$ na fronteira da figura, aumentando o tamanho da pavimentação parcial. Esse processo indutivo define então a desejada pavimentação ideal do plano Euclidiano.

CAPÍTULO 5: PAVIMENTAÇÃO MONOÉDRICAS POR PENTÁGONOS CONVEXOS

A descoberta de pentágonos convexos que servem como ladrilhos de uma pavimentação monoédrica do plano é uma saga que vem se desenvolvendo a mais de noventa anos. No que segue, apresentaremos um breve resumo desta interessante história. Nosso resumo está baseado nos *surveys* [6] e [16], na página da internet mantida por Marjorie Rice [15], além das referências citadas a seguir.

Aparentemente, o primeiro trabalho científico sistemático de classificação destes pentágonos convexos foi desenvolvido por Karl Reinhardt [14], em sua tese de doutorado apresentada na Universidade de Frankfurt em 1918. Nesta tese, ele apresentou cinco conjuntos diferentes de condições sobre ângulos e lados de um pentágono convexo para que

- (i) exista pelo menos um pentágono satisfazendo cada um destes conjuntos de condições e;
- (ii) exista pelo menos uma pavimentação do plano por um tal pentágono.

Na terminologia atual, cada um destes cinco conjuntos de condições define um *tipo* de pentágono convexo que pavimenta o plano. Deste modo, Reinhardt apresentou os cinco primeiros tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano. Aqui vale a pena observar que podem existir vários pentágonos convexos não congruentes de um mesmo tipo e que pavimentam o plano. Assim, para um mesmo tipo de pentágono convexo que pavimenta o plano, podem existir várias pavimentações não congruentes do plano. Isto significa que, podem existir pentágonos convexos que definem pavimentações do plano com grupos de simetrias diferentes. Veja tabela nas páginas 34 e 35 da referência [16].

Além disso, Reinhardt concluiu sua tese dizendo que, em princípio, poderia ser possível completar a discussão sobre quais pentágonos convexos pavimentam o plano seguindo as considerações dadas na sua tese, embora isso possa ser muito cansativo e exista a possibilidade de nenhum novo tipo de pentágono surgir desta tediosa análise.

Posteriormente, problemas de pavimentação, não somente por polígonos convexos, mas por figuras limitadas mais gerais, foram discutidos com muito detalhe no livro [8] de Heinrich Heesch e Otto Kienzle, publicado em 1963. Neste livro, utilizando um esquema

classificatório geral desenvolvido por Heinrich Heesch em 1932, eles demonstraram que as pavimentações obtidas por Reinhardt são as únicas pavimentações do plano, por pentágonos convexos, que são *transitivas*. Isto é, dadas duas peças da pavimentação, existe uma isometria do plano Euclidiano que preserva a pavimentação e que leva uma destas peças na outra. Observamos que este resultado também foi demonstrado por Branko Grünbaum e Geoffrey Shephard em 1978. Uma referência mais acessível para essa demonstração é o livro que eles publicaram em 1987, página 474. [7]

De algum modo, pode-se dizer que este resultado colaborou para que, na época, conjecturasse que somente seria possível pavimentar o plano por pentágonos convexos de um dos cinco tipos encontrados por Reinhardt. Entretanto, após 35 anos de trabalho intenso, Richard Brandon Kershner, na época diretor assistente do Laboratório de Física Aplicada da Universidade Johns Hopkins, demonstrou que esta conjectura é falsa, apresentando, em 1968, outros três tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano, obviamente, de maneira não transitiva.

Em sua publicação [10], Kershner apresenta estas três novas pavimentações do plano por pentágonos convexos e afirma, sem apresentar demonstração alguma (pois a demonstração completa exigiria um livro extremamente grande), que existem somente oito tipos de pentágonos convexos que servem de peças de uma pavimentação monoédrica do plano: os cinco tipos apresentados por Reinhardt e os três tipos apresentados por ele. Deste modo, em 1968 Kershner tinha resolvido completamente o problema de pavimentação do plano por pentágonos convexos. Entretanto, como veremos, isto foi considerado verdadeiro por sete anos, até que um acontecimento surpreendente causou uma reviravolta no problema de pavimentação do plano por pentágonos convexos.

Em julho de 1975, Martin Gardner publicou, em uma coluna na revista de divulgação científica *Scientific American* [5], o problema de pavimentação do plano por polígonos convexos, além da lista de Kershner, dos oito tipos de pentágonos convexos que conhecidamente pavimentam o plano. Esta publicação permitiu que o público em geral, cientistas de diversas áreas e matemáticos amadores tivessem contato com o problema, além de estimular a descoberta de novas pavimentações.

Richard James III, um cientista da área de computação, leu o artigo publicado por Martin Gardner e decidiu não olhar para a lista de Kershner, mas tentar descobrir sozinho algum pentágono convexo que pavimentasse o plano. Aconteceu que ele realmente conseguiu encontrar um exemplo. E, quando foi procurar o seu exemplo na lista de Kershner, não o encontrou! Surpreso com esse fato, Richard James III enviou uma ilustração do seu exemplo, por carta, para Martin Gardner acompanhada da pergunta: “você concorda que Kershner se esqueceu deste caso?”

Martin Gardner verificou que realmente Richard James tinha construído um novo tipo de pavimentação do plano por pentágonos convexos (elevando o total de tipos para nove), e publicou, no exemplar de dezembro de 1975 da própria *Scientific American*, esta descoberta de Richard James. [9]

Como relatado em [6], mesmo após ter dedicado anos da sua vida “resolvendo” o problema de pavimentação do plano por pentágonos convexos, Kershner foi espirituoso e recebeu a notícia da descoberta de Richard James com graça e bom humor.

Assim, o problema de pavimentações do plano por pentágonos convexos, dado como resolvido em 1968, tornou-se novamente um problema em aberto em 1975. Além disso, o surgimento de novos tipos de pavimentações do plano por pentágonos convexos não terminou com a descoberta de Richard James. De fato, esta descoberta despertou a curiosidade de uma outra leitora da *Scientific American*. Marjorie Rice, uma dona-de-casa de San Diego, com cinco filhos, sem formação matemática específica, além daquela obtida na escola do ensino médio, após ler o artigo de Martin Gardner de dezembro de 1975, começou a desenvolver sua própria pesquisa sistemática sobre quais tipos de pentágonos convexos podem pavimentar o plano. Dentre os vários resultados obtidos por ela, destaca-se a descoberta, em 1976 e em 1977, de quatro novos tipos de pavimentações do plano por pentágonos convexos (elevando agora o total para treze tipos).

A professora de matemática Doris Schattschneider, da Faculdade de Moravian, em sua publicação [16] de 1978, trouxe a pesquisa de Marjorie Rice à atenção da comunidade matemática, e confirmou que matemáticos profissionais tinham realmente negligenciado o que Marjorie Rice tinha descoberto. Além disso, o artigo [17] nos conta a história de como Marjorie Rice atacou o problema de pavimentação por pentágonos convexos após ler o

artigo de Martin Gardner na *Scientific American*. Este artigo é um testemunho não somente da perseverança de Marjorie, mas também da sua ingenuidade ao investigar o problema.

O décimo quarto tipo de pentágono convexo que pavimenta o plano foi descoberto somente em 1985 por Rolf Stein, um estudante de matemática da Universidade de Dortmund, Alemanha. A sua descoberta, a figura de uma nova pavimentação monoédrica do plano por pentágonos convexos, está publicada na capa da revista *Mathematics Magazine*, vol 58, de novembro de 1985, com uma nota explicativa na página 308. [19]

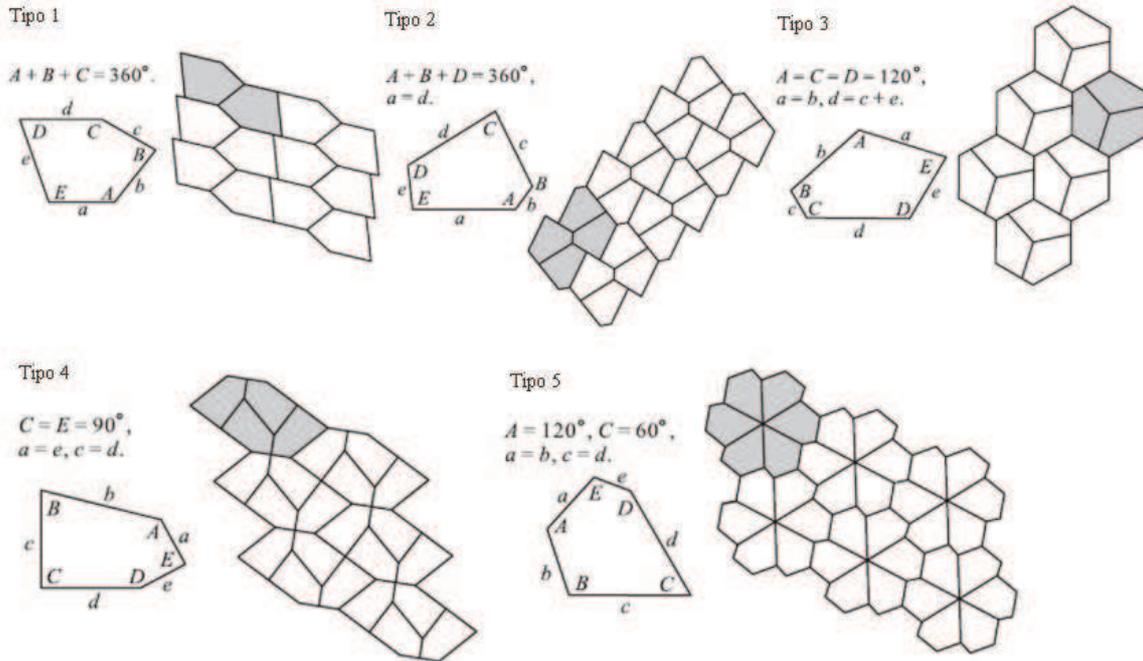
Até os dias atuais, nenhum outro tipo de pavimentação monoédrica do plano por pentágonos convexos foi descoberta, além de não existir ainda uma demonstração de que a lista dos quatorze tipos conhecidos seja completa.

Pelas nossas pesquisas bibliográficas, os resultados mais recentes sobre pavimentações do plano por pentágonos convexos têm sido obtidos pelos professores japoneses Teruhisa Sugimoto e Tohru Ogawa. Ver referências bibliográficas [20], [21], [22] e [23]. Em particular, nesta última referência, de 2007, esses professores afirmam:

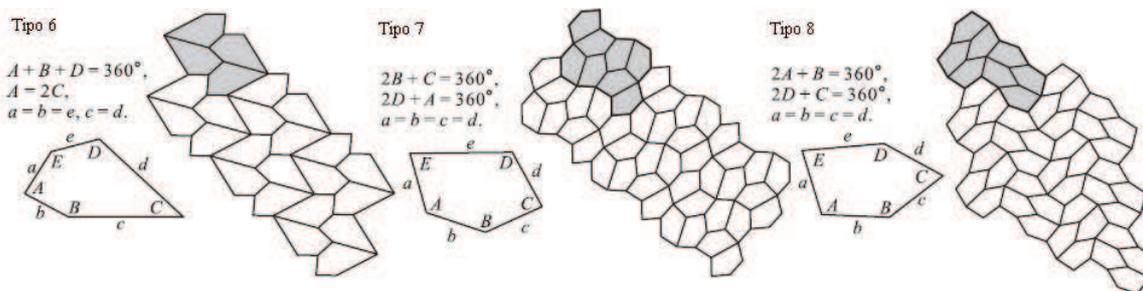
“The properties introduced in this paper may not be sufficient for solving the convex pentagonal tiling problem. However, by accumulating such properties one by one, we are steadily approaching the complete solution of the problem.”

Finalizamos este capítulo apresentando figuras dos 14 tipos conhecidos de pavimentações do plano por pentágonos convexos. Estas figuras foram extraídas da referência bibliográfica [20].

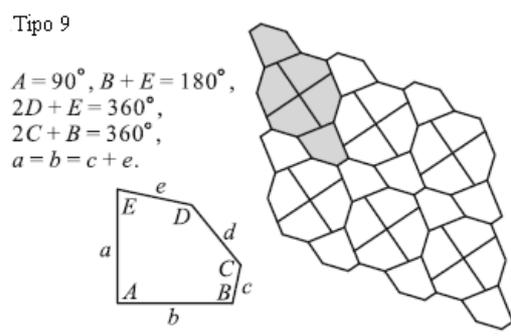
OS CINCO TIPOS DE KARL REINHARDT, 1918:



OS TRÊS TIPOS DE RICHARD KERSHNER, 1968:



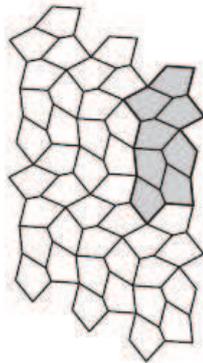
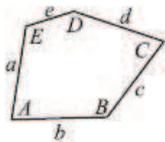
O EXEMPLO DE RICHARD JAMES, 1975:



OS QUATRO TIPOS DE MARJORIE RICE, 1976-1977:

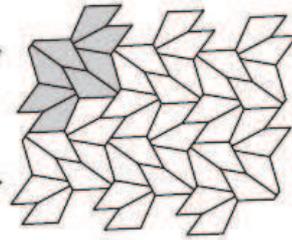
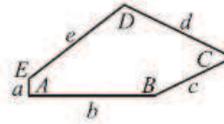
Tipo 10

$$\begin{aligned} 2E + B &= 360^\circ, \\ 2D + C &= 360^\circ, \\ a &= b = c = d. \end{aligned}$$



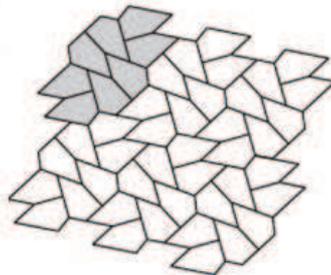
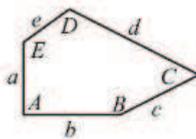
Tipo 11

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, C + E = 180^\circ, \\ 2B + C &= 360^\circ, \\ d &= e = 2a + c. \end{aligned}$$



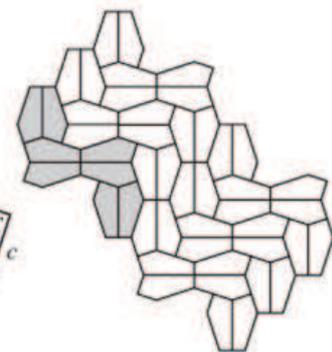
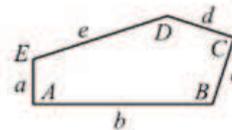
Tipo 12

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, C + E = 180^\circ, \\ 2B + C &= 360^\circ, \\ 2a &= d = c + e. \end{aligned}$$



Tipo 13

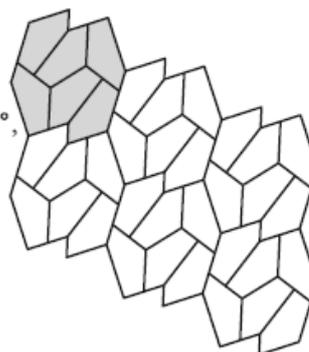
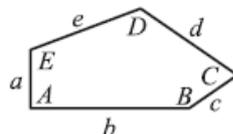
$$\begin{aligned} A &= C = 90^\circ, \\ 2B &= 2E = 360^\circ - D, \\ 2c &= 2d = e. \end{aligned}$$



O EXEMPLO DE ROLF STEIN, 1985:

Tipo 14

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, B \approx 145.34^\circ, \\ C &\approx 69.32^\circ, D \approx 124.66^\circ, \\ E &\approx 110.68^\circ, \\ 2a &= 2c = d = e. \end{aligned}$$



Nos quatorze tipos de pavimentações por pentágonos apresentados anteriormente, o conjunto de polígonos em destaque representa o domínio fundamental.

CAPÍTULO 6: POLÍGONOS CONVEXOS QUE NÃO PAVIMENTAM O PLANO

6.1. Enunciados dos teoremas e corolários

Nos capítulos anteriores vimos que é possível construir pavimentações monoédricas do plano por triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Será que pavimentações deste tipo podem ser construídas com polígonos de sete ou mais lados? O teorema a seguir, primeiramente demonstrado por Ivan Niven em 1978 [13], garante que isto é impossível.

Gostaríamos de comentar que a demonstração dada a seguir foi extraída de [13], embora os artigos [4] e [11] apresentem demonstrações, até mais simples, da parte (a) deste resultado.

Teorema:

- (a) *Sejam α e β quaisquer números reais positivos. É impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β .*
- (b) *Se qualquer uma das condições descritas no item anterior não for satisfeita, é possível pavimentar o plano com polígonos que satisfaçam as demais condições.*

Observações:

1. É importante ressaltar que em (a) não há condição de congruência: “qualquer coleção” significa qualquer conjunto de polígonos convexos que satisfaçam as condições estabelecidas em (a). Em particular, esse item (a), implica que é impossível construir uma pavimentação monoédrica do plano com um polígono de sete lados ou mais.
2. Em (a) também não existe restrição sobre o tipo de pavimentação: lado-lado, regular, monoédrica, periódica, etc. Ou seja, nas hipóteses de (a) é impossível definir qualquer tipo de pavimentação do plano.

3. Em (a) existem 4 condições para a não existência da pavimentação: convexidade, 7 ou mais lados, área limitada inferiormente e perímetro limitado superiormente. Assim, o item (b) nos diz que existe uma pavimentação do plano por uma coleção de polígonos que satisfaçam três destas condições, mas não as quatro. Deste modo, para demonstrar este item, deveremos exibir quatro pavimentações diferentes do plano, cada uma delas satisfazendo três e não satisfazendo uma das condições acima.
4. Veremos que a demonstração da parte (a) do teorema acima implica os seguintes corolários:

Corolário 1:

É impossível cobrir um quadrado de lado

$$4\beta + 32\beta^3\alpha^{-1} \tag{1}$$

com um número finito de polígonos satisfazendo as condições do teorema.

A palavra “cobrir” é utilizada aqui para permitir a possibilidade de que a cobertura poligonal se estenda além dos limites do quadrado. Isto é, a soma das áreas dos polígonos da cobertura do quadrado pode ser, eventualmente, maior que a área do quadrado.

Corolário 2:

Qualquer pavimentação do plano por polígonos convexos com áreas limitadas inferiormente e perímetros limitados superiormente deverá conter uma quantidade infinita de polígonos com 6 ou menos lados.

6.2. Pré-requisitos

Na prova do teorema acima, usaremos o Teorema de Euler, cuja demonstração pode ser encontrada na referência bibliográfica [12], e o lema a seguir:

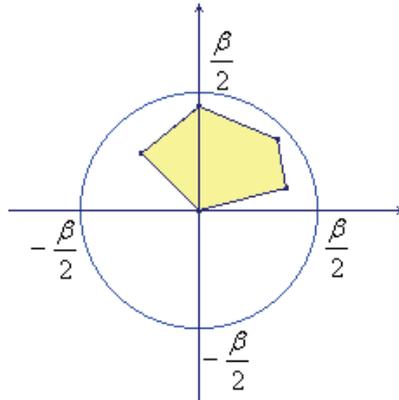
Teorema de Euler:

Seja dada uma pavimentação parcial do plano com f polígonos, v nós e a arestas.

Então é válida a seguinte igualdade $v - a + f = 1$.

LEMA: Se P é um polígono de perímetro menor que β então área de P é menor que β^2 .

Demonstração: Seja dado um polígono P no plano de perímetro menor que β . Vamos também considerar um sistema de coordenadas cartesiano que tem a origem sobre um dos vértices do polígono.



Pela desigualdade triangular conclui-se que esse polígono P está inteiramente contido no interior da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\frac{\beta}{2}$. Portanto a área do polígono P é menor que a área desse círculo, que é igual a $\pi \frac{\beta^2}{4}$. Como $\pi \frac{\beta^2}{4} < \beta^2$, concluímos que

$$\text{área}(P) < \frac{\pi}{4} \beta^2 < \beta^2. \quad \blacksquare$$

Vale a pena observar que o lema anterior também é uma consequência da desigualdade isoperimétrica, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [3].

Desigualdade isoperimétrica:

Entre todas as regiões limitadas por uma curva fechada e simples de comprimento dado, o círculo é a que tem maior área.

Vejam como a desigualdade isoperimétrica implica no lema. De fato, seja A a área limitada por um polígono de perímetro menor que β , e seja A_c a área de um círculo cuja fronteira tem comprimento igual a β . Pela desigualdade isoperimétrica $A < A_c$.

Como um círculo de raio r tem comprimento $2\pi r$ temos que $2\pi r = \beta$. Escrevendo r em função de β temos $r = \frac{\beta}{2\pi}$ e substituindo esse valor na expressão da área do círculo

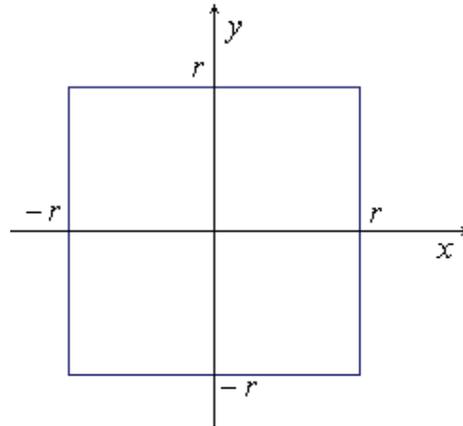
encontramos: $A_c = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^2 = \frac{\beta^2}{4\pi} < \beta^2$ daí concluímos que $A < A_c < \beta^2$, como

queríamos demonstrar. █

6.3. Demonstração da parte (a) do Teorema

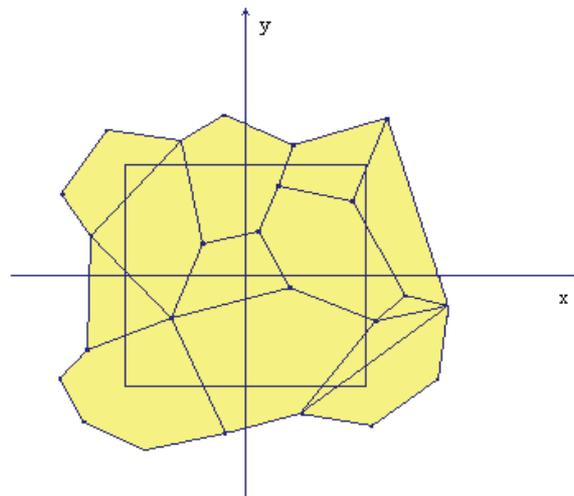
Por redução ao absurdo, vamos supor que o plano pode ser pavimentado por uma coleção de polígonos convexos cada um com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β , onde α e β são números reais positivos predefinidos na parte (a) do teorema. Nosso objetivo é então demonstrar que esta suposição levará a uma contradição. De fato, esta contradição será encontrada se apenas admitirmos que um quadrado (e o seu interior) de lado maior do que ou igual a expressão (1) possa ser coberto por uma coleção de polígonos satisfazendo as hipóteses do teorema (a). Apesar disso, para simplificar a demonstração, é mais simples admitirmos que o plano todo seja pavimentado. Ao final desta demonstração, a adaptaremos para uma região quadrangular.

Vamos considerar um sistema de coordenadas (x, y) no plano da pavimentação e uma região quadrangular $S(r)$ contendo todos os pontos (x, y) que satisfazem $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$, onde o número real positivo r será escolhido grande o suficiente para dar a contradição desejada.



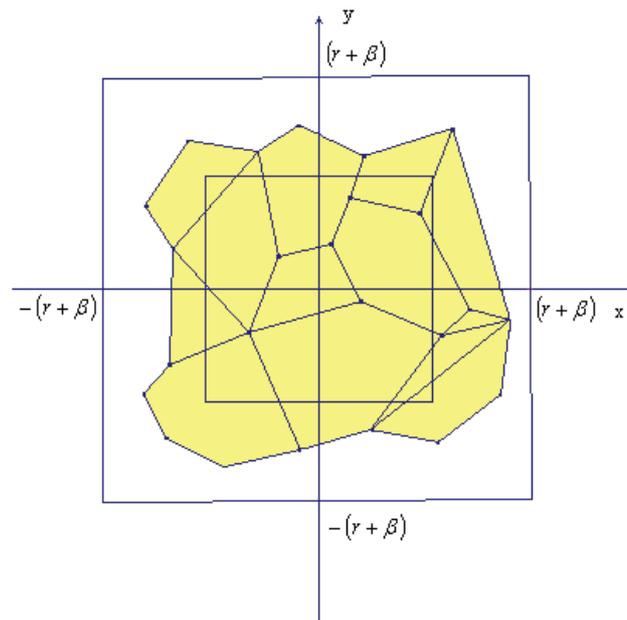
Seja N_1 a pavimentação parcial do plano construída do seguinte modo:

- se um polígono da pavimentação do plano contém algum ponto da região quadrangular $S(r)$, então este polígono faz parte da pavimentação parcial N_1 .
- além disso, caso algum polígono da pavimentação não tenha ponto em comum com $S(r)$ mas seja cercado por peças que tenham pelo menos um ponto em comum com $S(r)$ então esse polígono também faz parte da pavimentação N_1 .



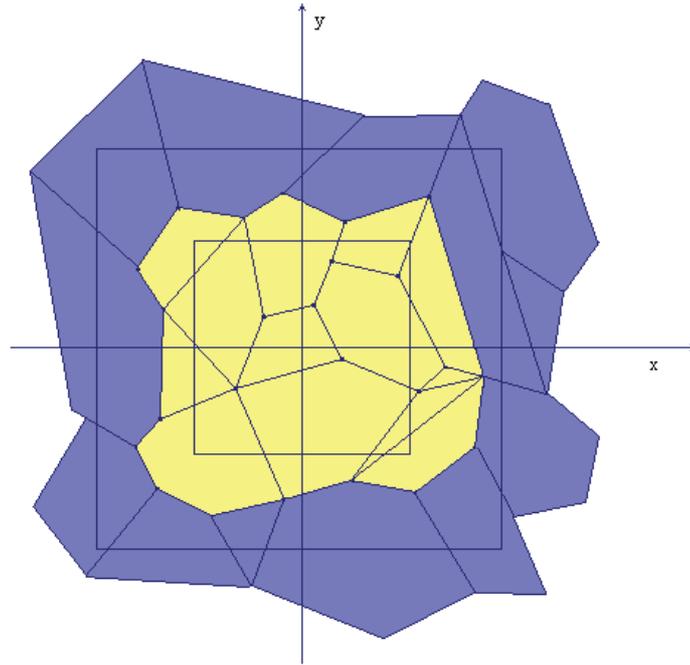
Observamos que a segunda condição da definição de N_1 é colocada apenas para garantirmos que N_1 pavimenta uma região simplesmente conexa (sem buracos) do plano.

Vamos também considerar uma região quadrangular $S(r + \beta)$, que corresponde à região quadrada com vértices $(\pm(r + \beta), \pm(r + \beta))$. Utilizando que o perímetro de cada polígono é menor que β , segue que a pavimentação N_1 está toda contida no interior desta região quadrangular $S(r + \beta)$.



Uma vez que cada um dos polígonos da pavimentação tem área maior que α , e N_1 está inteiramente contida em $S(r + \beta)$, segue que a pavimentação N_1 contém uma quantidade finita de polígonos.

Do mesmo modo como a pavimentação parcial N_1 foi definida para cobrir (sem buracos) a região quadrangular $S(r)$, vamos definir a pavimentação parcial N como sendo aquela que cobre, sem buracos, a região quadrangular $S(r + \beta)$. Veja figura a seguir.



Do mesmo modo como fizemos para N_1 , também podemos demonstrar que a pavimentação N possui uma quantidade finita de polígonos. Então vamos definir:

- f_1 o número de polígonos e v_1 o número de nós da pavimentação N_1 ;
- f o número de polígonos, v o número de nós e a o número de arestas da pavimentação N .

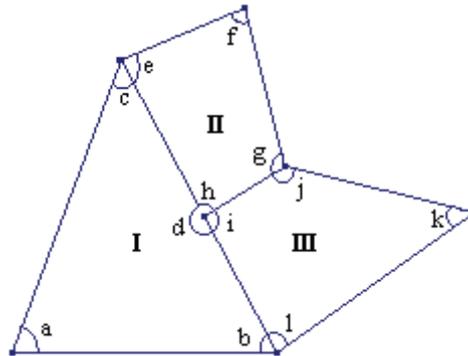
O Teorema de Euler, aplicado à pavimentação N , implica que:

$$v + f = a + 1 \Rightarrow v + f > a. \quad (2)$$

Vamos agora considerar a soma $\sum \alpha_i$ dos ângulos internos, em cada nó, de todos os polígonos da pavimentação N_1 . Somente para exemplificar esta soma, considere a pavimentação da figura a seguir. O polígono **I** é um triângulo com quatro nós em sua fronteira. Assim, a soma dos ângulos internos, em cada nó, do polígono **I** é igual a $a + b + c + d$. Por outro lado, o polígono **II** é um quadrilátero com quatro nós em sua fronteira. A soma dos ângulos internos, em cada um de seus nós é igual a $e + f + g + h$. Finalmente, o polígono **III** também é um quadrilátero com quatro nós em sua fronteira. A

soma dos ângulos internos, em cada um de seus nós é igual a $i + j + k + l$. Assim, para o caso da figura a seguir temos que

$$\sum \alpha_i = (a + b + c + d) + (e + f + g + h) + (i + j + k + l).$$



Voltando ao estudo da pavimentação N_1 , vamos determinar um limitante superior e um limitante inferior para a soma $\sum \alpha_i$.

Limitante inferior: seja X um polígono qualquer da pavimentação N_1 . Como o número de nós na fronteira de X é sempre maior do que ou igual a quantidade de seus vértices, temos que o número de nós n na fronteira de X é tal que $n \geq 7$, pois X tem pelo menos sete lados (ou seja, pelo menos sete vértices). Daí a soma S dos ângulos internos em cada nó do polígono X é tal que $S = (n - 2)\pi \geq (7 - 2)\pi = 5\pi$. Efetuando esse cálculo para cada um dos f_1 polígonos de N_1 vemos que $\sum \alpha_i \geq 5\pi f_1$.

Limitante superior: em cada um dos v_1 nós da pavimentação N_1 , a soma dos ângulos internos neste nó é sempre menor ou igual a 2π . Daí $2\pi v_1 \geq \sum \alpha_i$.

Dos limitantes acima para $\sum \alpha_i$ obtemos

$$2\pi v_1 \geq \sum \alpha_i \geq 5\pi f_1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi v_1 \geq 5\pi f_1 \quad \Rightarrow \quad 2v_1 \geq 5f_1 \quad (3)$$

A seguir examinaremos os v vértices dos polígonos na pavimentação N . Uma vez que a pavimentação N possui a arestas, e cada aresta conecta dois vértices, então o dobro do número de arestas é maior ou igual que o número de vértices, ou seja, $2a \geq v$. Mais ainda:

- cada vértice está conectado a pelo menos dois lados, segue que cada vértice está sendo contado pelo menos duas vezes pelo número $2a$.
- cada nó no interior da região pavimentada por N pertence a pelo menos três polígonos desta pavimentação, segue que nestes nós concorrem pelo menos três arestas, e esse vértice está sendo contado pelo menos três vezes pelo número $2a$.

Agora, uma vez que cada um dos v_1 vértices de N_1 é um vértice no interior da região pavimentada por N , segue que N possui pelo menos v_1 vértices interiores. Contando cada um deles três vezes, e os demais $v - v_1$ vértice de N duas vezes, obtemos:

$$2a \geq 3v_1 + 2(v - v_1) \Rightarrow 2a \geq v_1 + 2v. \quad (4)$$

Em (2) temos que $v + f > a$. Multiplicando essa desigualdade por dois temos $2v + 2f > 2a$. Substituindo essa desigualdade em (4), obtemos:

$$2v + 2f > v_1 + 2v \Rightarrow 2f > v_1.$$

Utilizando essa desigualdade multiplicada por dois e a desigualdade (3) concluímos que $4f > 2v_1 \geq 5f_1$. Ou seja,

$$4f > 5f_1. \quad (5)$$

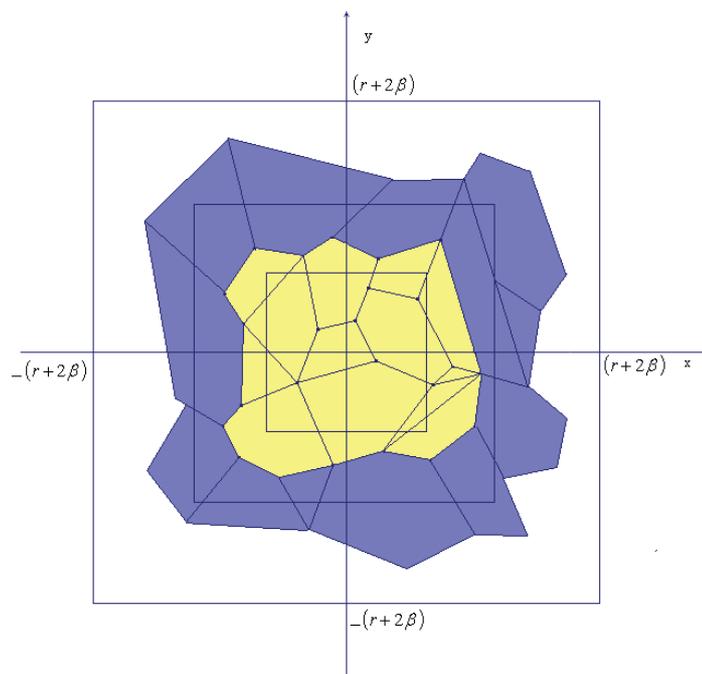
Por outro lado, existem $f_2 = f - f_1$ polígonos de N que não fazem parte da pavimentação N_1 . Multiplicando esta igualdade por quatro, obtemos $4f_1 + 4f_2 = 4f$. Substituindo esse valor em (5) obtemos a equação:

$$4f_1 + 4f_2 = 4f > 5f_1 \Rightarrow 4f_2 > 5f_1 - 4f_1 \Rightarrow 4f_2 > f_1. \quad (6)$$

Mais ainda, como cada polígono de N_1 tem perímetro menor que β , pelo Lema demonstrado no início da seção 7.2, segue que cada um desses polígonos tem área menor que β^2 . Conseqüentemente os f_1 polígonos na pavimentação N_1 tem área total menor que $\beta^2 f_1$. Mas esses polígonos cobrem a região quadrangular $S(r)$ com área $4r^2$, assim concluímos que:

$$4r^2 < \text{área}(N_1) \leq \beta^2 f_1 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 f_1 > 4r^2 \quad (7)$$

Agora vamos estudar a área limitada pelos f_2 polígonos que pertence à pavimentação N mas não a N_1 . Observe que esses polígonos estão compreendidos completamente na região quadrangular $S(r+2\beta)$, que é o quadrado de lado $2(r+2\beta)$ e vértices $(\pm(r+2\beta), \pm(r+2\beta))$. Isto segue do fato de que cada um desses polígonos tem perímetro menor que β .



Além disso, esses f_2 polígonos, que pertencem a N mas não a N_1 , estão fora da região quadrangular $S(r)$. Portanto esses f_2 polígonos estão no interior do anel retangular compreendido pela região interior ao quadrado $S(r+2\beta)$ e pelo exterior do quadrado $S(r)$.

Como a área deste anel retangular é $4(r+2\beta)^2 - 4r^2$, vemos que a área desses f_2 polígonos é menor que $4(r+2\beta)^2 - 4r^2$.

Por outro lado, cada um desses f_2 polígonos tem área maior que α . Assim, a área total desses f_2 polígonos é maior que αf_2 . Daí conclui-se que:

$$\alpha f_2 \leq \text{área}(f_2 \text{ polígonos}) \leq 4(r+2\beta)^2 - 4r^2$$

ou seja,

$$4(r+2\beta)^2 - 4r^2 \geq \alpha f_2. \quad (8)$$

Desenvolvendo esta última desigualdade obtemos:

$$\begin{aligned} 4(r+2\beta)^2 - 4r^2 &\geq \alpha f_2 && \Rightarrow \\ 4(r^2 + 4\beta r + 4\beta^2) - 4r^2 &\geq \alpha f_2 && \Rightarrow \\ 4r^2 + 16\beta r + 16\beta^2 - 4r^2 &\geq \alpha f_2 && \Rightarrow \\ 16\beta(r + \beta) &\geq \alpha f_2. \end{aligned}$$

Multiplicando por $4\beta^2$ obtemos $64\beta^3(r + \beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2$. Agora, utilizando as desigualdades (6) e (7) obtemos:

$$64\beta^3(r + \beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2 \quad \Rightarrow \quad 16\beta^3(r + \beta) > \alpha r^2.$$

Dividindo a desigualdade acima por $4\alpha r$ obtemos o resultado

$$r < 16\beta^3\alpha^{-1} \left(1 + \frac{\beta}{r}\right). \quad (9)$$

Por uma substituição direta, vê-se que essa desigualdade é falsa para $r = \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$. Como o lado esquerdo dessa desigualdade é uma função crescente de $r > 0$ e o lado direito dessa desigualdade é uma função decrescente de $r > 0$, concluí-se que a desigualdade (9) é falsa para qualquer valor de r maior que $\beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$.

Dessa maneira obtemos uma contradição se

$$r \geq \beta + 16\beta^3 \alpha^{-1} \quad (10)$$

Essa contradição finaliza a demonstração da parte (a) do teorema. █

Vejamos agora que, da demonstração acima, podemos demonstrar os corolários 1 e 2 enunciados no início da seção 7.1.

Voltando ao início da demonstração da parte (a) do Teorema, vemos que a contradição acima é uma consequência de termos

assumido que é possível cobrir a região quadrangular $S(r + \beta)$, que é um quadrado de lado $2r + 2\beta$, por polígonos que satisfazem as hipóteses da parte (a) do teorema desta seção. Portanto, a demonstração acima implica que é impossível cobrir um quadrado de lado $2r + 2\beta$, para $r \geq \beta + 16\beta^3 \alpha^{-1}$, com polígonos que satisfazem as hipóteses da parte (a) do teorema desta seção. Daí temos que, nessas hipóteses, é impossível cobrir um quadrado de lado maior que:

$$2(\beta + 16\beta^3 \alpha^{-1}) + 2\beta = 4\beta + 32\beta^3 \alpha^{-1}.$$

Isso é exatamente o corolário 1 da seção 7.1. A demonstração do corolário 2 da seção 7.1 segue por redução ao absurdo. De fato, suponhamos que, nas hipóteses desse corolário, seja possível pavimentar o plano utilizando apenas uma quantidade finita de polígonos tendo 6 ou menos lados. Isso implica que existem regiões quadradas arbitrariamente grandes do plano cobertas por polígonos tendo todos 7 ou mais lados. Isso contradiz o corolário 1, e conclui a demonstração do corolário 2.

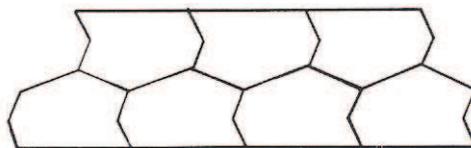
6.4. Demonstração da parte (b) do Teorema

Para a prova da parte (b) do teorema exibiremos pavimentações do plano Euclidiano que satisfazem todas, exceto uma das condições:

- (1) convexidade de cada um dos seus polígonos;
- (2) todos os polígonos possuem 7 ou mais lados;
- (3) área de cada polígono é maior que uma constante positiva α ;
- (4) perímetro de cada polígono é menor que uma constante positiva β ;

1- Exemplo de uma pavimentação que satisfaz as condições (2), (3) e (4) mas que não satisfaz a condição (1).

A figura abaixo mostra que é possível pavimentar o plano com polígonos *não convexos* com 7 ou mais lados.



2- Exemplo de uma pavimentação que satisfaz as condições (1), (3) e (4) mas que não satisfaz a condição (2).

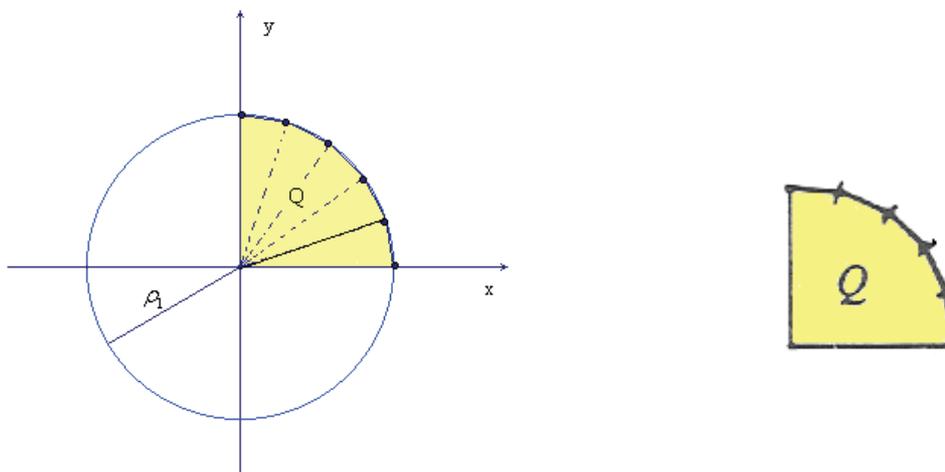
Como visto nos capítulos 3 e 4 é possível pavimentar o plano com polígonos de 3, 4, 5 e 6 lados. Além das pavimentações descritas nesses capítulos, existem várias outras pavimentações do plano com polígonos de até 6 lados. Mais exemplos podem ser encontrados na referência [1].

3- Exemplo de uma pavimentação que satisfaz as condições (1), (2) e (4) mas que não satisfaz a condição (3).

Dado $\beta > 0$, vamos construir uma pavimentação do plano por heptágonos convexos tal que cada um dos seus polígonos tenha perímetro menor do que β , mas que tenha polígonos de área arbitrariamente pequena.

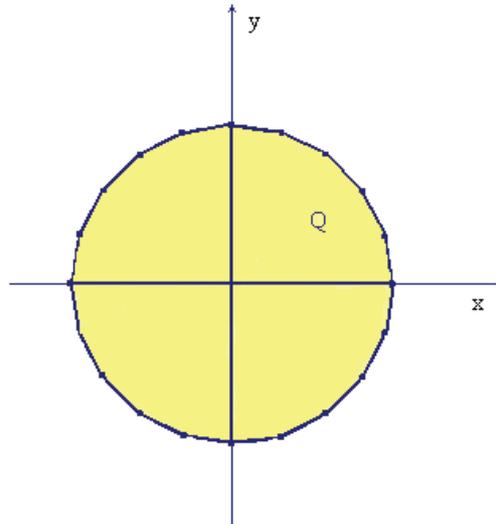
Para construir essa pavimentação vamos considerar um sistema de coordenadas cartesiano no plano Euclidiano e vamos representar cada ponto nesse plano através de coordenadas polares (ρ, θ) .

Primeiramente, considere uma circunferência C_1 de centro na origem e raio $\rho_1 > 0$, sendo que esse número será especificado a seguir. Considere agora o polígono Q cujos vértices possuem coordenadas polares $(0,0)$ e $(\rho_1, \frac{k\pi}{10})$ com $k = 0,1,2,3,4,5$. Veja figura a seguir.

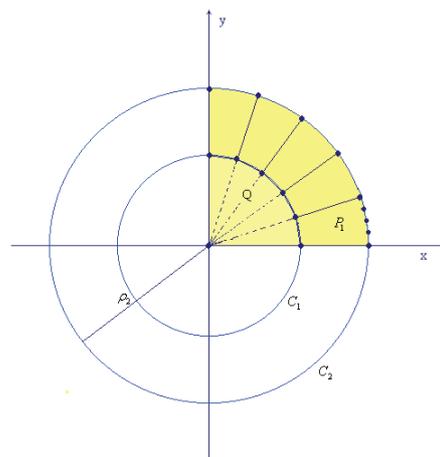


Observe que os vértices de Q sobre a circunferência C_1 estão igualmente espaçados e dois desses vértices consecutivos formam um arco de ângulo central $\frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$.

Efetuando rotações de Q ao redor da origem, de ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$, obtemos uma pavimentação parcial do plano ao redor da origem com 20 vértices sobre a circunferência C_1 .



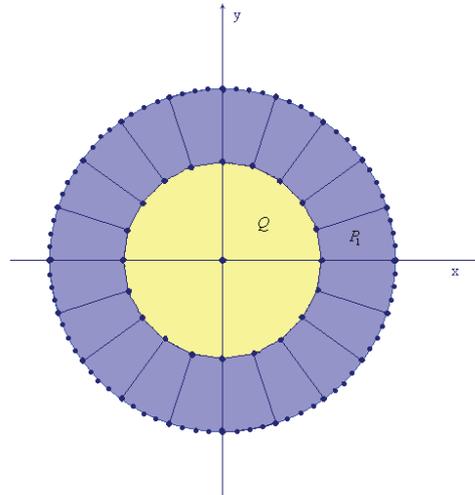
Consideremos agora uma circunferência C_2 de centro na origem e raio $\rho_2 > \rho_1$, sendo que o número ρ_2 será especificado a seguir.



Dividindo o arco de C_2 de ângulo central $\frac{\pi}{10}$ indicado na figura acima em quatro partes iguais, podemos formar o heptágono P_1 cujos vértices possuem coordenadas polares

$$\left(\rho_1, \frac{\pi}{10}\right), (\rho_1, 0) \text{ e } \left(\rho_2, k \frac{1}{4} \frac{\pi}{10}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

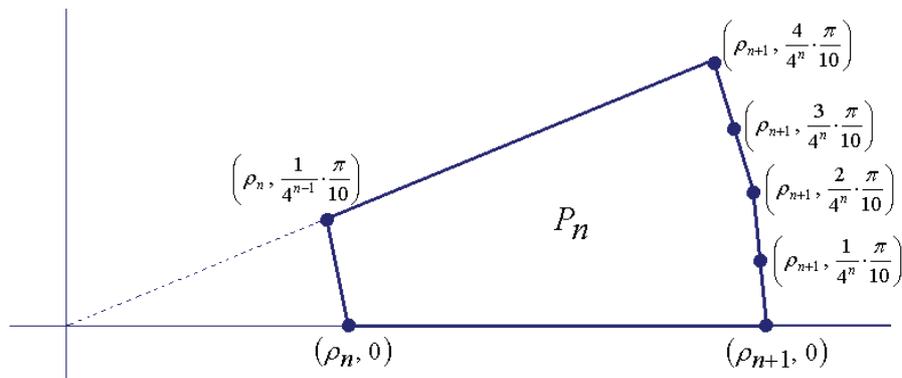
Efetuando rotações de P_1 ao redor da origem, obtemos agora uma pavimentação de uma região ao redor das quatro cópias de Q , veja figura a seguir.



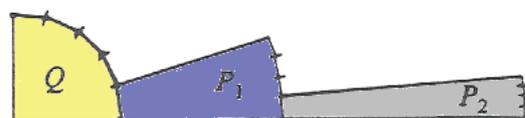
Continuando dessa maneira, considere para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ uma circunferência C_n de centro na origem e raio ρ_n e o polígono P_n de vértices

$$\left(\rho_n, \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}} \right), (\rho_n, 0), \left(\rho_{n+1}, \frac{k\pi}{10 \cdot 4^n} \right), \text{ com } k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

sendo que a seqüência $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$ será especificada a seguir.



É fácil notar que o primeiro e o último vértices listado em (11) são colineares com a origem assim como os vértices $(\rho_n, 0)$ e $(\rho_{n+1}, 0)$.



Desta forma um anel de polígonos em torno da origem é obtido rotacionando o polígono P_n ao redor da origem, repetidamente pelo ângulo $\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}$. Este anel é fechado depois que a rotação é repetida $20 \cdot 4^{n-1} - 1$ vezes. Além disso, os vértices de fora do anel de polígonos formados pela rotação de P_n são idênticos com os vértices internos do anel de polígonos formados pela rotação de P_{n+1} .

Concluimos então que os polígonos convexos Q, P_1, P_2, P_3, \dots , junto com suas réplicas congruentes, formadas pelas rotações em torno da origem, cobrem o plano inteiro sem espaço ou sobreposição, desde que ρ_n seja uma seqüência crescente e que tenha limite infinito quando n tende a mais infinito.

Agora vamos especificar os valores de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ para que a pavimentação descrita nesta seção seja tal que cada um dos seus polígonos tenha perímetro menor que β , sendo β um número real positivo previamente fixado. Ou seja, de modo que essa pavimentação satisfaça a condição (4) do teorema principal (ver início da seção 7.4).

Dado $\beta > 0$, defina

$$\rho_n = \frac{n\beta}{8}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Note que, neste caso, (ρ_n) é uma seqüência crescente e que tende ao infinito com n .

Vamos agora demonstrar que, neste caso, o polígono Q e cada um dos polígonos P_n têm perímetro menor que β . De fato, vamos mostrar que cada lado desses polígonos de 7 lados tem comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.

- Note que, unindo os dois primeiros vértices listados em (11) temos um lado de P_n de comprimento menor que o arco do círculo C_n de raio ρ_n e ângulo central

$\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}$. Esse arco tem comprimento igual a

$$\rho_n \cdot \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}} = \frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n} \quad (13)$$

Como $\frac{n\beta\pi}{20 \cdot 4^n} < \frac{\beta}{7}$ para todo $n \geq 1$, esse lado do polígono P_n tem comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.

- O lado do polígono P_n de vértices $(\rho_n, 0)$ e $(\rho_{n+1}, 0)$ tem comprimento $\rho_{n+1} - \rho_n = \frac{(n+1)\beta}{8} - \frac{n\beta}{8} = \frac{\beta}{8} < \frac{\beta}{7}$.
- Um outro lado de P_n também tem comprimento $\rho_{n+1} - \rho_n$, que é menor que $\frac{\beta}{7}$, como acabamos de demonstrar.
- Os quatro lados restantes, que unem os últimos cinco vértices em (11) tem comprimento do tipo (13) com n sendo substituído por $n+1$. Como vimos acima, como cada número listado em (13) é menor que $\frac{\beta}{7}$, esses quatro lados de P_n tem comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$.
- Até aqui demonstramos que os 7 lados de P_n têm comprimento menor que $\frac{\beta}{7}$, para todo $n \geq 1$. Isso implica, evidentemente, que o perímetro do polígono de 7 lados P_n é menor que β .
- Argumentando como acima, conclui-se também que cada um dos lados do polígono Q é menor que $\frac{\beta}{7}$. Daí esse polígono também tem perímetro menor que β .

Então, demonstramos que a pavimentação ideal por heptágonos convexos construída nessa seção é tal que cada um dos seus polígonos tem perímetro menor que β . Portanto essa pavimentação satisfaz às condições (1), (2) e (4) do início da seção 7.4. Mas, como vimos na parte (a) do teorema principal desse capítulo, não existe pavimentação que satisfaz as 4 condições descritas anteriormente. Isso implica que a pavimentação construída nesta seção

não satisfaz a condição (3), ou seja, nessa pavimentação existem polígonos de área arbitrariamente pequena.

4- Exemplo de uma pavimentação que satisfaz as condições (1), (2) e (3) mas que não satisfaz a condição (4).

Dado $\alpha > 0$, vamos construir uma pavimentação do plano por heptágonos convexos tal que cada um dos seus polígonos tenha área maior do que α , mas que tenha polígonos de perímetro arbitrariamente grande.

Essa pavimentação será construída como a da seção anterior, mas com uma escolha diferente das constantes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$. Estas constantes serão agora escolhidas de modo que cada um dos polígonos da pavimentação tenha área maior do que α , sendo α um número real positivo previamente fixado.

Primeiramente vejamos que podemos escolher ρ_1 de forma que o heptágono Q tenha área maior que α . De fato, a área de qualquer heptágono convexo certamente ultrapassa a área do triângulo formado por três dos seus vértices. Considere o triângulo formado pelos vértices $(0,0)$, $(\rho_1,0)$ e $(\rho_1, \frac{\pi}{2})$ do heptágono Q . Como esse triângulo tem área $\frac{\rho_1^2}{2}$, certamente podemos escolher ρ_1 de tal maneira que essa área ultrapasse α .

Procedendo recursivamente definimos:

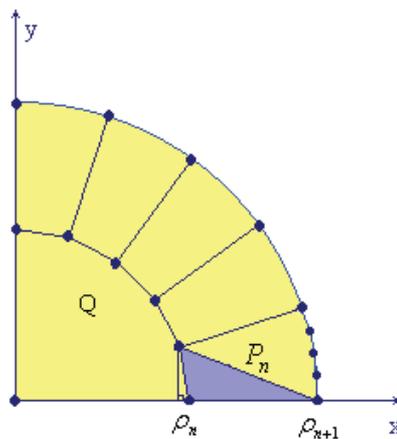
$$\rho_{n+1} = n + \rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right) \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Vamos provar que isso define uma seqüência (ρ_n) crescente e ilimitada.

- Como $n + 2\alpha\rho_n^{-1} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right) > 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ temos que $\rho_{n+1} > \rho_n$. Daí (ρ_n) é uma seqüência crescente.
- Como $\rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right) > 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ temos que $\rho_{n+1} > n$. Daí (ρ_n) é uma seqüência que tende ao infinito com n .

De acordo com a construção da seção anterior, com (ρ_n) uma seqüência crescente e ilimitada, temos construída uma pavimentação do plano por heptágonos convexos. Para concluir o propósito da seção atual, basta mostrar que cada polígono desta pavimentação tem área maior do que α .

Para provar isto precisamos mostrar que a área de cada polígono P_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, é maior do que α . Vejamos que isso é verdade. O heptágono P_n tem área maior que a área do triângulo formado pelos três primeiros vértices considerados em (11), ou seja, os pontos do plano com coordenadas polares $\left(\rho_n, \frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right)$, $(\rho_n, 0)$ e $(\rho_{n+1}, 0)$.



Assumindo que a área de um triângulo é dada pela metade da base vezes a altura, vemos que a área desse triângulo é dada por:

$$T_n = \frac{1}{2}(\rho_{n+1} - \rho_n) \times \rho_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right)$$

De (14) segue que

$$T_n = \alpha + \frac{n}{2} \rho_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right).$$

Desta expressão, segue que a área T_n é maior do que α , para todo n . Uma vez que a área do polígono P_n é maior que a área T_n , segue que a área do polígono P_n é maior que α , como queríamos demonstrar.

Agora, observe que o polígono P_n tem um lado de comprimento

$$\rho_{n+1} - \rho_n = n + 2\alpha\rho_n^{-1} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{10 \cdot 4^{n-1}}\right).$$

Como esse comprimento é maior que n , a pavimentação construída nesta seção é tal que os seus polígonos não possuem perímetros limitados superiormente. Dessa forma, essa pavimentação satisfaz às condições (1), (2) e (3) mas não satisfaz a condição (4) do início da seção 7.4.

Todos os exemplos acima constituem a demonstração da parte (b) do teorema principal. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. M. Barbosa, *Descobrimo Padrões em Mosaicos*, São Paulo, Atual, 1993.
- [2] B. Bollobas, *Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping*, Annals Universitatis Scientiarum Budapestinensis, 1963.
- [3] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] C. Fulton, *Tessellations*, The American Mathematical Monthly, (1992) v.99, nº 5, pp. 442-445.
- [5] M. Gardner, *On tessellating the plane with convex polygon tiles*, Scientific American, July 1975, 112-117.
- [6] M. Gardner, *Time Travel and other mathematical bewilderments*, W. H. Freeman, 1988, capítulo 13 intitulado “tiling with convex polygons”, pp. 163-176.
- [7] B. Grünbaum e G. C. Shephard, *Tiling by polygons*, W. H. Freeman and Company, New York, 1987. (capítulo 9: tiling by polygons)
- [8] H. Heesch and O. Kienzle, *Flächenschulss*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [9] R. James, *New pentagonal tiling reported by Martin Gardner in Scientific American*, December 1975, 117-118.
- [10] R. B. Kershner, *On paving the plane*, in The American Mathematical Monthly October 1968, v. 75, nº 8, pp. 839-844.
- [11] M. S. Klamkin e A. Liu, *Notes on results of Niven on impossible tessellations*, in The American Mathematical Monthly, (1980) v.87, nº 8, pp. 651-653.
- [12] E. L. Lima, *A matemática do Ensino médio*, SBM, v.2 (2000), 231- 250.

- [13] I. Niven, *Convex Polygons Cannot Tile The Plane*, in The American Mathematical Monthly, (1978) v.85, n° 10, pp. 785-792.
- [14] K. Reinhardt, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Dissertation der Naturwiss, Universität Frankfurt, 1918.
- [15] M. Rice, home-page: <http://tessellations.home.comcast.net/~tessellations/>, acessada em outubro de 2008.
- [16] D. Schattschneider, *Tiling the plane with congruent pentagons – a problem for anyone to contribute to: a survey of the growing but incomplete story of pentagonal tilings of the plane*, Mathematics Magazine, vol. 51, n° 1, January 1978, pp 29-44.
- [17] D. Schattschneider, *The Mathematical Gardner: In Praise of Amateurs*, in David Klarner, ed., (New York: Wadsworth, 1981), pp. 140-166.
- [18] D. Schattschneider, *The Fascination of Tiling*, in *The Visual Mind: Art and Mathematics*, ed. Michele Emmer, pp. 157-164. Boston: MIT Press, 1994.
- [19] R. Stein, *A new pentagon tiler*, capa da revista “Mathematics Magazine” vol. 58, de novembro de 1985, e nota de Doris Schattschneider na página 308.
- [20] T. Sugimoto and T. Ogawa, *Tiling Problem of Convex Pentagon*, Forma, 15, pp 75-79, 2000.
- [21] T. Sugimoto and T. Ogawa, *Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, I: Case of Convex Pentagons with Four Equal-length Edges*, Forma, 20, pp 1-18, 2005.
- [22] T. Sugimoto and T. Ogawa, *Properties of Tilings by Convex Pentagons*, Forma, 21, pp 113-128, 2006.
- [23] T. Sugimoto and T. Ogawa, *Convex Pentagonal Tiling Problem and Properties of Nodes in Pentagonal Tilings*, Form and Symmetry: Art and Science, Buenos Aires Congress, 2007.