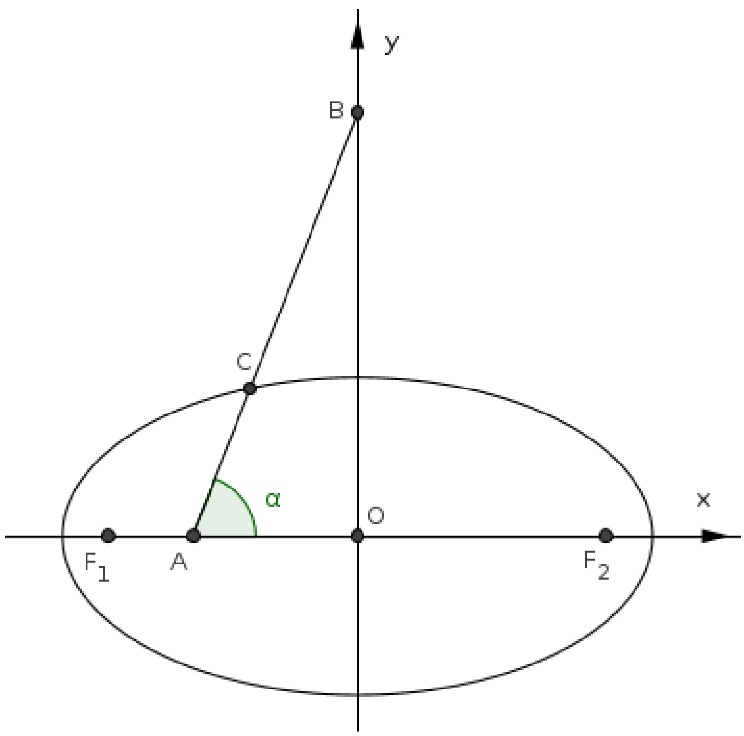
Parametrização de uma elipse

Mateus Gomes Lucas

15 de agosto de 2013

Definições. *Dado um sistema cartesiano ortogonal xOy, escolhamos arbitrariamente um ponto A em x, um ponto B em y e um ponto C em AB. Seja Ax uma semi-reta em x, com origem em A e sentido igual ao sentido positivo de x. Definamos o ângulo α como o ângulo entre Ax e AB, medido no sentido anti-horário, a partir de Ax.*

Lema. *Se variarmos α de 0 a 2π, sem modificarmos as distâncias AB, AC e, consequentemente, CB, o ponto C descreverá uma elipse, isto é, as sucessivas posições de C formarão uma elipse.*



Demonstração. Sem perda de generalidade, seja $AC < CB$. Além disso, suponhamos que os focos F_1 e F_2 da provável elipse pertençam a Ox e sejam equidistantes de O.

Seja $OF_1 = OF_2 = F$.

Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a soma das distâncias de C aos dois focos será $2\sqrt{F^2 + AC^2}$.

Já quando $\alpha = 0$, a soma será $2 \cdot CB$.

Se as sucessivas posições de C descreverem uma elipse, devemos ter:

$$2\sqrt{F^2 + AC^2} = 2 \cdot CB$$
$$F^2 = CB^2 - AC^2$$

As coordenadas do ponto C podem ser escritas em função de α da seguinte forma:

$$C = (-CB\cos\alpha, AC\sin\alpha)$$

Temos também que:

$$F_1 = (-F, 0)$$
$$F_2 = (F, 0)$$

Para um valor qualquer de α, a distância D_{CF_1} entre C e F_1 será:

$$\begin{aligned}
D_{CF_1} &= \sqrt{(-CB\cos\alpha - (-F))^2 + (AC\sin\alpha - 0)^2} \\
&= \sqrt{CB^2\cos^2\alpha - 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2 + AC^2\sin^2\alpha} \\
&= \sqrt{(AC^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (CB^2 - AC^2)\cos^2\alpha - 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2} \\
&= \sqrt{AC^2 + F^2\cos^2\alpha - 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2} \\
&= \sqrt{AC^2 + F^2\cos^2\alpha - 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + CB^2 - AC^2} \\
&= \sqrt{F^2\cos^2\alpha - 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + CB^2} \\
&= \sqrt{(F\cos\alpha - CB)^2} = |F\cos\alpha - CB|
\end{aligned}$$

E a distância D_{CF_2} entre C e F_2 será:

$$\begin{aligned}
D_{CF_2} &= \sqrt{(-CB\cos\alpha - F)^2 + (AC\sin\alpha - 0)^2} \\
&= \sqrt{CB^2\cos^2\alpha + 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2 + AC^2\sin^2\alpha} \\
&= \sqrt{(AC^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (CB^2 - AC^2)\cos^2\alpha + 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2} \\
&= \sqrt{AC^2 + F^2\cos^2\alpha + 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + F^2} \\
&= \sqrt{AC^2 + F^2\cos^2\alpha + 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + CB^2 - AC^2} \\
&= \sqrt{F^2\cos^2\alpha + 2 \cdot CB\cos\alpha \cdot F + CB^2} \\
&= \sqrt{(F\cos\alpha + CB)^2} = |F\cos\alpha + CB|
\end{aligned}$$

Se C descreve uma elipse, a soma dessas distâncias deve ser constante.

Obviamente, temos $F = OF_1 < ON = CB$. Portanto $F < CB$ e, consequentemente, $|F \cos \alpha - CB| = CB - F \cos \alpha$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} D_{CF_1} + D_{CF_2} &= |F \cos \alpha - CB| + |F \cos \alpha + CB| \\ &= CB - F \cos \alpha + F \cos \alpha + CB \\ &= 2 \cdot CB \end{aligned}$$

Portanto, C realmente descreve uma elipse e a soma das distâncias de qualquer ponto desta elipse até cada um dos focos é igual a $2 \cdot CB$. Além disso, os focos possuem coordenadas $(\pm\sqrt{CB^2 - AC^2}, 0)$.

Sendo assim, $C = (-CB \cos \alpha, AC \sin \alpha)$ é uma parametrização de uma elipse, sendo α o parâmetro, ou seja, variando o valor de α, as sucessivas posições de C formam uma elipse.

Analogamente, pode-se provar que C descreve uma elipse, sendo C apenas colinear a A e B, sem necessariamente pertencer ao segmento AB. ■